CONCEPTO DE INTERIOR EN LF-TOP

Carlos Orlando Ochoa Castillo*

Resumen

Se presenta el concepto de interior deste el ambiente de los espacios topológicos reticulares hasta los espacios topológicos difusos.

1. GL - Monoides

Sea $(L, \leqslant)$ un retículo infinitamente distributivo y completo (ver [11]), esto es, $(L, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo $A \subset L$ el extremo superior $\bigvee A$ y el extremo inferior $\bigwedge A$ están definidos y para todo $\alpha \in L$ se satisface

$$\left(\bigvee A\right) \wedge \alpha = \bigvee\{a \wedge \alpha \ \mid \ a \in A\}, \qquad \left(\bigwedge A\right) \vee \alpha = \bigwedge\{a \vee \alpha \ \mid \ a \in A\}.$$

En particular, $\top := \bigvee L$ y $\bot := \bigwedge L$ son el máximo y el mínimo de L respectivamente. Se asume además que $\bot \neq \top$ lo que significa que L tiene por lo menos dos elementos. Un $GL-$monoide (ver [11]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria $\otimes$ constituyéndose en una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, es decir, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$ $\alpha \leqslant \beta$ implica $\alpha \otimes \gamma \leqslant \beta \otimes \gamma$;

(2) $\otimes$ es commutativa, i.e. $\forall \alpha, \beta \in L$, $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$,

(3) $\otimes$ es asociativa, esto es $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(4) $(L, \leqslant, \otimes)$ es entero, i.e. $\top$ actúa como elemento unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas

(5) $\perp$ actúa como elemento cero en $(L, \leqslant, \otimes)$, es decir $\alpha \otimes \perp = \perp, \forall \alpha \in L$;

(6) $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios, esto significa que $\alpha \otimes (\bigvee_j \beta_j) = \bigvee_j (\alpha \otimes \beta_j)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_j : j \in J\} \subset L$;

(7) $(L, \leqslant, \otimes)$ is divisible, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ such that $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Por otro lado, todo $GL-$monoide es residuado, i.e. existe una operación binaria adicional "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leqslant \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leqslant (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

La implicación está dada por:

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee \{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leqslant \beta\}.$$

Las propiedades exhibidas en [11] más usuales de los $GL-$monoides son

(i) $\alpha \longmapsto \beta = \top \Longleftrightarrow \alpha \leqslant \beta$;

(ii) $\alpha \longmapsto (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i (\alpha \longmapsto \beta_i)$;

(iii) $(\bigvee_i \alpha_i) \longmapsto \beta = \bigwedge_i (\alpha_i \longmapsto \beta)$;

(v) $\alpha \otimes (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i (\alpha \otimes \beta_i)$;

(vi) $(\alpha \longmapsto \gamma) \otimes (\gamma \longmapsto \beta) \leqslant \alpha \longmapsto \beta$;

(vii) $\alpha \otimes \beta \leqslant (\alpha \otimes \alpha) \vee (\beta \otimes \beta)$.

Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y las MV-álgebras. En verdad (ver [6]), un *álgebra de Heyting* es un GL-monoide del tipo $(L, \leqslant, \wedge, \vee, \wedge)$ (i.e. en el caso de un álgebra de Heyting $\wedge = \otimes$). Un GL-monoide es una *MV-algebra* si $(\alpha \longmapsto \perp) \longmapsto \perp = \alpha \quad \forall \alpha \in L$, ver [11]. Así, en una MV-algebra existe una involución $^c : L \to L$ que invierte el orden y que se define de manera natural como $\alpha^c := \alpha \longmapsto \perp \quad \forall \alpha \in L$.

Ejemplo 1.1. *Dado un espacio topológico (X, τ), la colección $\mathfrak{C}_\tau$ de los subconjuntos cerrados de X es un GL-monoide en el que*

$$\bigwedge_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} A_j, \qquad \bigvee_{j \in J} A_j = adh\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \qquad y \quad A \otimes B = adh(int(A \cap B),$$

donde int y adh denota los operadores interior y adherencia respectivamente.

Si X es un conjunto y L es un GL-monoide, entonces el conjunto de L-partes L^X hereda la estructura de GL-monoide. En particular los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por $1_X(x) := \top$ y $0_X(x) := \bot$ para todo $x \in X$ son el máximo y el mínimo en L^X respectivamente. En lo que sigue L denota un GL-monoide arbitrario.

Debilitando el Retículo L

El trabajo con GL-monoides se hace bastante agradable gracias a su gran abanico de propiedades, entre ellas la de incluir la implicación (o exponencial), pero para quien estudia esta fenomenología, es imperativo tratar de disminuir el número de condiciones; es así que en [5], el soporte de las teorías son los *retículos cuasi-monoidales completos*; en ese contexto, un retículo cuasi-monoidal completo o *cqm-lattice* es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface:

1. $(L, \leqslant)$ es un retículo completo donde $\top$ denota la cota superior universal y $\bot$ denota la cota inferior universal.

2. $(L, \leqslant, \otimes)$ es un grupoide parcialmente ordenado, i. e. $\otimes$ es una operación binaria sobre L que satisface el axioma de isotonía

$$a \leqslant b \text{ and } c \leqslant d \quad \text{implica} \quad a \otimes c \leqslant b \otimes d.$$

3. $\alpha \leqslant \alpha \otimes \top$, $\alpha \leqslant \top \otimes \alpha$, para todo $\alpha \in L$.

Dados los retículos cuasi-monoidales completos $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ y $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$, un morfismo ϕ entre $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ and $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$ es una función $\phi : L_1 \to L_2$ que satisface:

m1. ϕ conmuta con extremos superiores arbitrarios.

m2. $\phi(\alpha \otimes_1 \beta) = \phi(\alpha) \otimes_2 \phi(\beta)$.

m3. ϕ preserva cotas superiores universales, i. e. $\phi(\top) = \top$.

Tenemos la categoría **CQML** donde los objetos son los retículos cuasi-monoidales completos (cqm-lattices) y los morfismos son los morfismos entre los retículos cuasi-monoidales completos.

Un grupoide parcialmente ordenado $(L, \leqslant, \otimes)$ es un *cl*-grupoide si $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios no vacíos, i. e.

4. Para $J \neq \emptyset$,

$$\left(\bigvee_{j\in J} \alpha_j\right) \otimes \beta = \bigvee_{j\in J} (\alpha_j \otimes \beta) \qquad \text{y} \qquad \beta \otimes \bigvee_{j\in J} \alpha_j = \bigvee_{j\in J} (\beta \otimes \alpha_j)\,.$$

Cuestión 1.1. *Presente la categoría de los GL-monoides.*

2. La Categoría C-HTOP

Dado un GL-monoide $(L, \leqslant, \otimes)$. Un subconjunto T de L es una *topología reticular* si

t1. Los extremos universales superior $\top$ e inferior $\bot$ del retículo completo $(L, \leqslant)$ son elementos de T,

t2. Para cada par a, b de elementos de T se tiene que $a \otimes b$ también es un elemento de T,

t3. Si $\xi \subseteq T$ entonces $\bigvee_{x\in\xi} x$ es un elemento de T.

Cuando T es una topología reticular sobre L, se dice que (L, T) es un *espacio topológico reticular*.

Note que este concepto es una consecuencia de la analogía existente entre las estructuras $(L, \leqslant, \otimes, \bot, \top)$ y $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X)$ dada por las relaciones

$$\leqslant \leftrightarrow \subseteq, \quad \otimes \leftrightarrow \cap, \quad \vee \leftrightarrow \cup, \quad \bot \leftrightarrow \emptyset, \quad \text{y} \quad \top \leftrightarrow X.$$

En verdad, un espacio topológico reticular es un objeto de la categoría **C-HTOP** presentada por Rodabaugh en [9] que coincide con el concepto de L-topología presentado por Höhle y Šostak en [5] pg. 153 cuando X es un punto. Nótese que son varios los conceptos de la teoría usual que pueden ser extendidos a este universo; por ejemplo, al decir que un espacio topológico reticular (L, T) es Hausdorff si para $x, y \in L$ existen $a, b \in T$ tales que $x < a$, $y < b$ y $a \otimes b = \bot$. Es menester presentar el siguiente concepto atendiendo el comentario anterior:

Definición 2.1. *Sea (L, T) es un espacio topológico reticular. Se dice que un elemento $b \in L$ es una vecindad de otro elemento $a \in L$ si existe $c \in \mathcal{T}$ tal que $a \leqslant c \leqslant b$.*

Ejemplo 2.1. *Del ejemplo 1.1, Una topología reticular en* $\mathfrak{C}_\tau$ *es una colección* T *de elementos de* $\mathfrak{C}_\tau$ *que satisface*

- $\emptyset, X \in T$,
- $A, B \in T$ *implica que* $A \otimes B = adh(int(A \cap B)) \in T$,
- *Si* $\xi \subseteq T$ *entonces* $\bigvee_{\lambda\in\xi} A_\lambda = adh(\bigcup_{\lambda\in\xi} A_\lambda) \in T$.

Finalmente, $B \in \mathfrak{C}_\tau$ *es una vecindad reticular de* $A \in \mathfrak{C}_\tau$ *si existe* $C \in T$ *tal que* $A \subseteq C \subseteq B$.

El concepto de topología reticular está en estrecha relación con el operador de L-interior (cf. [5] pg. 171), una aplicación $\mathfrak{i} : L \to L$ es un *operador de* L*-interior* sobre L si

i1. $\mathfrak{i}(\top) = \top$,

i2. $a \leqslant b$ implica $\mathfrak{i}(a) \leqslant \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in L$,

i3. $\mathfrak{i}(a) \otimes \mathfrak{i}(b) \leqslant \mathfrak{i}(a \otimes b)$,

i4. $\mathfrak{i}(a) \leqslant a$,

i5. $\mathfrak{i}(a) \leqslant \mathfrak{i}(\mathfrak{i}(a))$.

es fácil ver que el conjunto

$$T_{\mathfrak{i}} := \{b \in L \mid b \leqslant \mathfrak{i}(b)\}$$

es una topología reticular; por otro lado, si $T \subset L$ es una topología reticular se obtiene la aplicación $\mathfrak{i}_T : L \to L$ definida por

$$\mathfrak{i}_T(a) = \bigvee\{b \in T \mid b \leqslant a\}$$

que evidentemente se constituye en un operador interior.

Cuestión 2.1. *Establezca el concepto de continuidad en espacios topológicos reticulares.*

3. La Categoría L-TOP

Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una *L-topología* (cf. [5] y [8]) sobre X es un subconjunto τ de L^X que satisface:

o1. $1_X, 1_\emptyset \in \tau$,

o2. Si $f, g \in \tau$, entonces $f \otimes g \in \tau$,

o3. Si $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau$ entonces $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \in \tau$.

Si τ es una L-topología sobre X, al par (X, τ) se le denomina *espacio L-topológico.*

Ejemplo 3.1. *Sean L y M objetos de la categoría* **CQML** *y $Mor[L, M]$ el conjunto de todos los morfismos de L en M; cada $a \in L$ induce una función:*

$$f_a : Mor[L, M] \to M$$
$$\phi \to \phi(a)$$

es claro que el conjunto $\eta = \{f_a \mid a \in L\}$ es una M-topología sobre $Mor[L, M]$.

El conjunto $\mathbf{L-TOP_X}$ de todas las L-topologías sobre X es parcialmente ordenado, el orden está determinado por la relación de inclusión; además, L^X es la cota superior universal, esto es, la L-topología discreta en este contexto; por otro lado, si se tiene una familia arbitraria de L-topologías sobre X, su intersección es tambien una L-topología, en consecuencia, $(\mathbf{L-TOP_X}, \subseteq)$ es un retículo completo.

Cuestión 3.1. *Decir los elementos que forman la L-topología grosera sobre X.*

Como es natural esperar, se pueden *generar* L-topologías sobre X, en efecto; dado ξ un subconjunto de L^X, de acuerdo a lo anterior, la intersección de todas las L-topologías que contienen a ξ es una L-topología, es la L-topología generada por ξ que se nota con $\langle\xi\rangle$. En esta dirección, si τ es una L-topología y ξ un subconjunto de L^X, se dice ξ es una *subbase* de τ si $\tau = \langle\xi\rangle$.

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios L-topológicos, se dice la función $\psi : X_1 \to X_2$ es L-contínua si se satisface que

$$\{g \circ \psi \mid g \in \tau_2\} \subseteq \tau_1.$$

Es fácil ver que los espacios L-topológicos y las funciones L-contínuas forman una categoría, se trata de la categoría **L-TOP**. Un ejercicio es probar la siguiente

Proposición 3.1. *Sean* (X_1, τ_1) *y* (X_2, τ_2) *espacios* L*-topológicos,* ξ *una subbase de* τ_2 *y la función* $\psi : X_1 \to X_2$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. ψ *es* L*-contínua,*
2. $\{g \circ \psi \mid g \in \xi\} \subseteq \tau_1$.

3.1. Concepto de interior en L-TOP

Sea X un conjunto, una función $I : L^X \to L^X$ es un operador de L-*interior* (cf. [5]) si satisface:

I0. $I(1_X) = 1_X$,

I1. Si $f \leqslant g$ entonces $I(f) \leqslant I(g)$,

I2. Para todo par $f, g \in L^X$, $I(f) \otimes I(g) \leqslant I(f \otimes g)$,

I3. Para toda $f \in L^X$, se tiene que $I(f) \leqslant f$, y

I4. Para toda $f \in L^X$, es $I(f) \leqslant I(I(f))$.

En verdad, no es sorpresa tener una L-topología τ sobre X y de forma natural contar con un operador de L-interior asociado con τ; como es de esperarse es $I_\tau : L^X \to L^X$ dado por

$$I_\tau(f) = \bigvee \{g \in \tau \mid g \leqslant f\}.$$

Por otro lado, todo operador I de L-interior produce una L-topología τ_I sobre X, esta es

$$\tau_I = \{g \in L^X \mid g \leqslant I(g)\};$$

tal como se discute en [4], la unicidad es evidente en ambos casos; es decir, dada una L-topología τ sobre X, I_τ es único y vice versa, dado un operador de L-interior I, τ_I es única. En consecuencia, para I y τ dados se tiene que $I_{\tau_I} = I$ y $\tau_{I_\tau} = \tau$.

4. La Categoría LF-TOP

Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una *topología L-difusa* sobre X es una función $\mathcal{T} : L^X \to L$ que satisface:

o1. $\mathcal{T}(1_X) = \top$,

o2. Para $f, g \in L^X$, $\mathcal{T}(f) \otimes \mathcal{T}(g) \leqslant \mathcal{T}(f \otimes g)$,

o3. Para todo subconjunto $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de L^X se tiene la desigualdad

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}(f_\lambda) \leqslant \mathcal{T}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda).$$

Si $\mathcal{T}$ es una topología L-difusa sobre X, el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico L-difuso.

Como el conjunto X es no vacío, L^X consiste en por lo menos dos elementos. En particular, el extremo inferior universal en $(L^X, \leqslant)$ está dado por $1_\emptyset$. Cuando tomamos el subconjunto vacío de L^X y aplicamos el axioma o3, obtenemos

o1'. $\mathcal{T}(1_\emptyset) = \top$.

Lo novedoso de esta perspectiva es que todos elementos de L^X son abiertos en algún grado, la funcón $\mathcal{T}$ expresa el grado en que esos elementos son abiertos.

En el conjunto

$$\textbf{L-FTOP}_X = \{\mathcal{T} : L^X \to L \mid \mathcal{T} \text{ es una topología } L\text{-difusa sobre } X\},$$

se introduce la relación $\preceq$ como sigue:

$$\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \quad \text{sii} \quad \mathcal{T}_1(f) \leqslant \mathcal{T}_2(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X,$$

observe que $\preceq$ es un orden parcial y en consecuencia $(\textbf{L-FTOP}_X, \preceq)$ es un objeto de **Pos**; cuando $\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2$, se dice que $\mathcal{T}_1$ es *más gruesa* que $\mathcal{T}_2$ o que $\mathcal{T}_2$ es *más fina* que $\mathcal{T}_1$. $(\textbf{L-FTOP}_X, \preceq)$ trae más sorpresas:

Proposición 4.1. *$(\textbf{\textit{L-FTOP}}_X, \preceq)$ es un retículo completo.*

Demostración. Es evidente que la función $\mathcal{T}_{\text{dis}} : L^X \to L$ definida por

$$\mathcal{T}_{\text{dis}}(f) = \top \quad \text{para todo} \quad f \in L^X$$

es una topología L-difusa y es la cota superior universal (el máximo) de $\mathbf{L\text{-}FTOP}_X$ con respecto al orden $\preceq$; para concluir la prueba, es suficiente mostrar que existe el extremo inferior en $\mathbf{L\text{-}FTOP}_X$ de una familia $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ de topologías L-difusas sobre X; en esta dirección, la función $\widehat{\mathcal{T}} : L^X \to L$ definida por

$$\widehat{\mathcal{T}} := \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X$$

es una topología L-difusa sobre X y es el extremo inferior de la familia $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$. □

La prueba de la proposición anterior presenta un procedimiento para obtener una topología L-difusa sobre X a partir de una función $\mathcal{S} : L^X \to L$ cualquiera: Se considera el conjunto

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{S}} := \{\mathcal{T} \in \mathbf{L\text{-}FTOP}_X \mid \mathcal{S}(f) \preceq \mathcal{T}(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X\},$$

desde luego, el extremo inferior $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ de este conjunto con respecto a $\preceq$ es un elemento de $\mathfrak{Z}_{\mathcal{S}}$ y es la topología L-difusa sobre X menos fina que satisface $\mathcal{S}(f) \preceq \mathcal{T}(f)$ para toda $f \in L^X$.

Definición 4.1. *Una función $\mathcal{S} : L^X \to L$ es una subbase de la topología L-difusa $\mathcal{T}$ si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Dados (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos L-difusos; $\phi : X \to Y$ es *LF-contínua* sii para toda $g \in L^Y$, ϕ satisface

$$\eta(g) \leqslant \tau(g \circ \phi).$$

Se relacionan los conceptos de subbase y continuidad como sigue:

Proposición 4.2. *Sean (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos L-difusos, $\phi : X \to Y$ y $\mathcal{S} : L^Y \to L$ una subbase para η; las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. *ϕ es LF-continua,*

ii. *$\mathcal{S}(g) \leq \tau(g \circ \phi)$ para toda $g \in L^Y$.*

Demostración. Es evidente que $i. \Rightarrow ii.$ Ahora para ver $ii. \Rightarrow i.$ se considera la topología L-difusa $\hat{\tau}$ en Y definida por:

$$\hat{\tau}(g) = \tau(g \circ \phi), \qquad \text{para toda} \quad g \in L^Y.$$

Es evidente que $\hat{\tau}$ es la toplogía L-difusa más fina que hace a ϕ LF-continua, por tanto,

$$\mathcal{S}(g) \leq \hat{\tau}(g) \qquad \text{para toda} \quad g \in L^Y,$$

como $\mathcal{S}$ es una subbase de η, la proposición $i.$ se sigue. □

La categoría $\mathbf{L-FTOP}$ incluye la siguiente información: Los objetos son los espacios topológicos L-difusos y los morfismos son las funciones LF-continuas; la composición corresponde a la composición usual de funciones y la identidad de (X, τ) es la función idéntica id_X de X.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{O} : \mathbf{L-FTOP} \to \mathbf{SET}$ el functor de olvido; entonces $\mathbf{L-FTOP}$ es una categoría topológica sobre $\mathbf{SET}$ con respecto a $\mathcal{O}$.*

Demostración. De la prueba de la proposición 4.2, toda función

$$\psi : \mathcal{O}(X, \tau) \to Y$$

tiene un único levantamiento final $\psi : (X, \tau) \to (Y, \eta)$ i. e. se resuelve el problema de la topología final; además, de la proposición 4.1 $(\mathbf{L-FTOP}, \mathcal{O})$ es completo por fibras, en consecuencia, de acuerdo con [1] es suficiente con ver que para todo espacio topológico L-difuso (Y, η) una función $\psi : X \to Y$ tiene un único levantamiento inicial $\psi : (X, \tau) \to (Y, \eta)$; esto es, se resuelve el problema inicial. Sea $\mathcal{R} : L^X \to L$ definida por

$$\mathcal{R}(h) = \begin{cases} \bigvee \eta(g), & \text{si} \quad h = \psi \circ g \quad \text{para algún} \quad g \in L^Y, \\ \top, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y se considera la topología L-difusa τ en X generada por $\mathcal{R}$ (es decir, τ es la topología menos fina que satisface $\mathcal{R} \preceq \tau$), en consecuencia ψ es LF-continua con respecto a τ y η. Para ver que se resuelve efectivamente el problema inicial, se supone ahora que hay una función $\rho : (Z, \zeta) \to (Y, \eta)$ LF-continua y una función $\theta : Z \to X$ tal que $\rho = \psi \circ \theta$. De la definición de $\mathcal{R}$ y de la LF-continuidad de ψ se obtiene que

$$\mathcal{R}(h) \leq \rho(h \circ \theta), \quad \text{para toda} \quad h \in L^X.$$

Como $\mathcal{R}$ es una subbase para τ, por la proposición 4.2 se obtiene que θ es LF-continua con respecto a ζ y τ, por tanto ψ es un morfismo inicial. de la antisimetría del orden $\preceq$ se obtiene la unicidad de este morfismo inicial. $\square$

4.1. El concepto de interior en L – FTOP

Una función $\mathcal{I} : L^X \times L \to L^X$ es un operador de interior L-difuso sobre X si $\mathcal{I}$ satisface:

I0. $\mathcal{I}(1_X, \alpha) = 1_X$, para todo $\alpha \in L$,

I1. $\mathcal{I}(g, \beta) \leqslant \mathcal{I}(f, \alpha)$, siempre que $g \leqslant f$ y $\alpha \leqslant \beta$,

I2. $\mathcal{I}(f, \alpha) \otimes \mathcal{I}(g, \beta) \leqslant \mathcal{I}(f \otimes g, \alpha \otimes \beta)$,

I3. $\mathcal{I}(f, \alpha) \leqslant f$, para todo $\alpha \in L$,

I4. $\mathcal{I}(f, \alpha) \leqslant \mathcal{I}(\mathcal{I}(f, \alpha), \alpha)$, para todo $\alpha \in L$,

I5. $\mathcal{I}(f, \perp) = f$,

Referencias

[1] Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.

[3] N. Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1966

[4] M. García Marrero y Otros, *Topología*, Vol. I, Alhambra, Madrid, 1975.

[5] U. Höhle, A. Šostak, *Fixed-Basis Fuzzy Topologies* In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[6] Peter T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[7] W. Kotzé, *Uniform Spaces* In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[8] Liu Ying-Ming and Luo Mao-Kang, *Fuzzy Topology*, World Scientific, Singapore, 1997.

[9] S. E. Rodabaugh, *Powerset Operator Foundations For Poslat Fuzzy Set Theories and Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[10] Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] Alexander P. Šostak, *Fuzzy functions and an extension of the category L-Top of Chang-Goguen L-topological spaces*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, Prague, Czech Republic, 2001.