SUMAS BINOMIALES Y FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

Juan Carlos López Carreño, Rosalba Mendoza Suárez,

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

jclopez@unipamplona.edu.co, rosalbame@unipamplona.edu.co

telefonos: 3173256131 - 3162350183

Dirección: Pamplona. Ciudad Universitaria; Km 1 Vía Bucaramanga

15 de abril de 2009

SUMAS BINOMIALES Y FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

1.La Función Hipergeométrica

Con el fin de presentar la ecuación hipergeométrica (ó ecuación de Gauss) y la función hipergeométrica como una de sus soluciones en serie de potencias en torno al origen, se recordará en esta sección, algunos elementos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Supongamos que la ecuación diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

se puede escribir en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

donde $a_2(x) \neq 0$, x en algún intervalo I, y

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)},$$

Establezcamos sin demostración, el siguiente resultado

1.2 Teorema: Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n.$$

Una solución en serie de potencias converge por lo menos en el intervalo $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 al punto singular más cercano.□

1.3 Definición: Decimos que el punto singular $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

si las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2 Q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.

En relación con los puntos singulares vale el siguiente teorema que solo enunciamos y cuya demostración puede consultarse en [1].

2. La ecuación Hipergeométrica: La ecuación hipergeométrica es la ecuación diferencial

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0, \tag{2}$$

en donde a, b, c son constantes. Para esta ecuación

$$P(x) = \frac{c - (a + b + 1)x}{x(1 - x)} \text{ y } Q(x) = -\frac{ab}{x(1 - x)},$$

de esta manera $x = 0$, $x = 1$ son los puntos singulares de la ecuación (2).

Buscamos mediante un cálculo formal, soluciones de la ecuación (2) en la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x)^{n+r}, \tag{3}$$

en donde $c_0 \neq 0$ y r es un número que debe determinarse, hallando y' y y'' de (3), y reemplazandola en (2), entonces la ecuación diferencial se convierte en

$$\begin{aligned}
&(r - 1 + c)c_0 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \{(k + r)(k + r - 1 + c)c_k - [(k + r - 1)(k + r - 2) + \alpha(k + r - 1) + ab]c_{k-1}\} \\
&\times\ x^k = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

de donde los posibles valores de r son $r = 0$, $r = 1 - c$.

Para $r = 0$, como el coeficiente de x^k, $k \geq 1$ en el lado izquierdo de (4) debe ser cero, se tiene

$$k(k + c - 1)c_k - [(k - 1)(k - 2) + \alpha(k - 1) + ab]c_{k-1} = 0,\ \ k \geq 1,$$

si se usa la sustitución $k - 1 = n$, se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia para los coeficientes c_n:

$$c_{n+1} = \frac{(n + a)(n + b)}{(n + 1)(n + c)} c_n,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

y por inducción matemática se establece que,

$$c_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n},$$

con estos coeficientes (3) se puede escribir como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{5}$$

la serie (5) se conoce como ***serie hipergeométrica*** y se nota así

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{6}$$

Muchas funciones elementales tienen representación como una serie hipergeométrica; por ejemplo

1. Si no hay parámetros en el numerador ni en el denominador,

$${}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

2. Si hay un parámetro en el numerador y ningún parámetro en el denominador,

$$
{}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-a}
$$

Con base a que sumas de productos de coeficientes binomiales se pueden reducir a series hipergeométricas, utilizamos este método para hallar sumas binomiales escibiendolas como series hipergeométricas y luego desarrollando la serie para hallar su suma.

Algunos de los ejemplos de sumas que logramos con este método fueron:

Ejemplo 3.1

Una fórmula que expresa el valor de π como una serie infinita fué proporcionada por el matemático japonés *Takebe Kenko (1664-1739)* en el año 1722. Según se pude ver en [3]. Esta serie tambien fue obtenida por el misionero *Pierre Jartoux* en 1720, él trabajó en China y tuvo correspondencia con Leibniz, pero existe la convicción en los historiadores de la matemática que el descubrimiento de Kenko fue independiente. Anotamos además que L. Euler redescubrió esta misma serie en 1737. Hasta donde sabemos por el método de las funciones hipergeométricas que nosotros utilizamos en la demostración, dicha fórmula no se ha demostrado hasta el día de hoy.

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} = \frac{\pi^2}{4}.
$$

Ejemplo 3.2

El problema 3399 de la revista *The American Mathematical Monthy*, considerado en la revista como uno de los mejores 400 problemas (1918-1950), pide probar o refutar

$$\sum_{k=0}^{t}(-1)^k \binom{r+1}{k} \binom{2r-2k}{r} = r+1$$

donde $t = \frac{r}{2}$ si r es par y $t = \frac{(r-1)}{2}$ si r es impar.

Anotamos que ninguna de las tres soluciones publicadas en la revista utiliza el método de solución que nosotros utilizamos.

Ejemplo 3.3

El desarrollo en serie de fracciones parciales para la función $\pi\cot(\pi x)$, es conocida desde Euler, numerosas pruebas de este desarrollo han aparecido en la literatura matemática. El objetivo de este ejemplo es presentar aún otra prueba de ello aplicando la teoría de las series hipergeométricas. Así pues demostramos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2x}\left[\frac{1}{x} - \pi\cot(\pi x)\right] \tag{7}$$

Ejemplo 3.4

En la referencia [2], el autor da una prueba elemental, basada en cierta fórmula de interpolación para el operador de diferencias de la identidad

$$m\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+j)\ \Gamma(m+2j)\ (-n)_j}{\Gamma(\beta+1-n+2j)\ \Gamma(m+j+1)j!} = \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-n-m)}, \tag{8}$$

el objetivo del siguiente ejemplo, es proporcionar una demostración para (8), usando el método de las funciones hipergeométricas, y potencializar el método al encontrar que por este método se simplifica la complejidad matemática que presenta [2], en su demostracion.

Bibliografía

[1] E.A. Coddington, Introduction to ordinary differential Equations, Prentice-Hall, New York (1961).

[2] Ismail, M.E: *On formulas of Ramanujan and Evars*, *Ramanujan J* ,(2006). 11: 349-353.

[3] D:E: Smith and Y. Mikami, *History of Japanese Mathematics,* Chicago, open court, (1914).

[4] S. Lewanowicz, *The hypergeometric functions approach to the connection problem for the classical orthogonal polynomials*, Preprint (1997).

[5] Y. L. Luke, *The Special Functions and their Approximations* (Academic, New York, 1969).

[6] J. Carlos López, Rosalba Mendoza, Margarita Rico, Emiliano Almeyda. *Expansión de funciones*Bistua. Universidad de Pamplona 2007.