El análisis no estándar otra epistemología de la función derivada

Autor: Eliseo Ramírez Rincón*

**Profesor de tiempo completo de la universidad de Ciencias Aplicadas y Ambientales en Bogotá calle 222 N°55-37 (tel. 6684700 ext 136), profesor de medio tiempo en la universidad Libre en Bogotá (sede el bosque), estudiante de doctorado en Educación de la universidad Pedagógica Nacional de Bogotá Tel:615-65-37) e-mail: elmatematis@gmail.com*

Abstract: The history and epistemology of derivative function as a differential calculus object, talk about the complexity and the fluctuations that it has undergone to acquire derivative function status during the last twenty centuries. Many people have studied and have worked on it at different cultures and times, too. They have done contributions that have allowed to make changes on the derivative function, in order this to be as we know it today, because it has been being developed and shaped itself along this time to turn it into a very potent (formal, applied and for teaching) object. It is so the importance of this mathematical object that it allows to solve problems from mathematics itself, and of natural, social and human sciences.

The central aspect of this lecture is to present some considerations around the complexity of derivative function as a teaching object and also as a taught object, from standard epistemology as well as to throw a glance on the same object from a non standard epistemology

Keywords: Derivative, function, history, epistemology, didactic, cognition.

---

1. INTRODUCCIÓN

Entre las complejidades de la función derivada se encuentra su lenguaje: la simbología, las representaciones (internas-externas), los contextos de uso y aplicación, las interpretaciones y la relación enseñanza-aprendizaje. De acuerdo con lo anterior es posible estudiar la complejidad de la función derivada en cuatro dimensiones: Histórica, epistemológica, cognitiva y didáctica. Se aclara que para algunos investigadores como Artigue (1995), solo son tres las dimensiones, porque se considera como una de ellas, la historia y la epistemología. Para este trabajo la historia muestra el camino a la epistemología que no necesariamente es único.

El interés de esta propuesta es evidenciar desde la historia un camino de otra epistemología no usual de la función derivada y en ese sentido, presentar otras posibles epistemologías del objeto, que favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje, porque la epistemología del objeto puro no necesariamente responde a las necesidades e implicaciones de las relaciones entre el objeto a enseñar y el objeto enseñado. La Didáctica de la Matemática (Europa continental), Matemática Educativa- Educación Matemática (descendencia Anglosajona), hacen referencia a lo mismo; su diferencia es puramente geográfica. Cantoral (2000). La didáctica de la matemática, como ciencia emergente intenta responder entre otras a las preguntas: ¿Qué enseñar? Y ¿Cómo enseñar? y por lo tanto estudia las relaciones establecidas entre la función derivada como objeto matemático, la función derivada como objeto a enseñar y la función derivada como objeto enseñado, sin descuidar el entorno o aspecto cultural en el que se propone, así como tampoco los usos de ésta.

DESARROLLO

Desde 1823, cuando Cauchy definió el objeto función, se han propuesto algunos trabajos respecto a la misma, sin embargo la mayoría de ellos retoma la definición de Cauchy para su elaboración; es el caso de los trabajos propuestos sobre la función derivada por Caratheodory (teoría de funciones de variable compleja, 1954), Fréchet (diferencial total, 1963) y Gâteaux (derivada direccional, 1925, citado por Nicolescu, 1963). Alrededor de estos trabajos se han hecho propuestas sobre la didáctica de la función derivada, pero centradas en el pensamiento avanzado del cálculo, aspecto que no beneficia a los estudiantes de los dos primeros semestres de ingeniería o de otras carreras que estudian el cálculo, entre otras razones por la complejidad de éste, por el nivel con el que pasan del colegio a la universidad en cuanto a las ideas previas. Estas propuestas que se han presentado están en el análisis estándar, porque corresponden a la epistemología de Cauchy, en la que el límite como objeto matemático es el que permite estudiar a la función derivada y más aún son muy novedosas y ricas en recursos y estrategias en el nivel de pensamiento matemático avanzado, hecho que tampoco favorece el proceso de aprendizaje de un estudiante que apenas está incursionando en el cálculo. De otra parte se encuentran las propuestas que se han hecho en el análisis estándar, pero con otra epistemología, como la hecha por Cantoral (1995), al retomar el trabajo de Lagrange sobre series, evitando así el paso al límite para abordar la función derivada. Esta propuesta de Cantoral está en un nivel de pensamiento básico del cálculo y eso permite que sea una alternativa en el proceso de enseñanza aprendizaje de la función derivada con estudiantes de los primeros semestres. En el mismo sentido se puede construir una propuesta en el análisis no estándar con los hiperreales de Robinson (Abraham Robinson, nacionalizado en USA, matemático nacido en la actual Polonia. En la década del 70, propuso los hiperreales, como extensión del conjunto de los reales). Con este enfoque se disminuye el peso del rigor matemático asumido por el lenguaje de la función derivada en el análisis estándar, acercando a los estudiantes (mujeres y hombres) "primíparos" a los fundamentos del cálculo desde la intuición, antes que desde el rigor matemático, porque en el proceso natural del ser humano, éste primero aprende a hablar y luego a escribir y no al contrario.

Los hiperreales son una extensión de los números reales que contienen a los números infinitésimos e infinitos que no tienen cabida en los reales (análisis estándar), por lo tanto se cumplen las propiedades de los números reales también y su estructura es mas intuitiva que rigurosa, disminuyendo la pesada formulación matemática de la función derivada. La siguiente expresión permite mostrar las diferencias entre el análisis estándar y el no estándar, para determinar la continuidad de la función derivada *f´(x)* en un punto *(x, y),* y por ende estudiar la diferenciabilidad de la función *f,* en ese punto.

- Expresión clásica (análisis estándar):

$$\forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0},\ \exists \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}((|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}| < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_1})| < \boldsymbol{\varepsilon}))$$

- Expresión en análisis no estándar: $\forall \boldsymbol{x}\ ((\boldsymbol{x} \simeq \boldsymbol{x_1} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x_1})))$

La expresión no estándar, es más intuitiva y práctica.

En general, los números hiperreales permiten suprimir muchos cuantificadores.

Acosta y Delgado (1994), se basaron en el trabajo que sobre la función derivada en los reales realizó Kuhn (1991), a partir de lo hecho por Caratheodory, sobre la función derivada de variable compleja. Acosta y Delgado a partir de la idea de Kuhn propusieron la definición para funciones de R^n en R^m, realizando algunas demostraciones y resolviendo algunos ejercicios, donde muestran como calcular derivadas utilizando la definición de Caratheodory. Además, establecen la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet (diferencial total,) y Caratheodory. Otra de las definiciones de diferencial es la conocida con el nombre de derivada de Gâteaux o derivada direccional. Se ha demostrado que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero no lo es la afirmación contraria, por lo tanto, debido a la equivalencia entre la derivada de Caratheodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Caratheodory también es diferenciable según Gâteaux.

Estas propuestas, son muy importantes en el desarrollo, construcción y enseñanza del objeto matemático, pero dado su lenguaje riguroso y su compleja red en la que están incrustadas, como propuestas en la enseñanza de la función derivada los estudiantes requieren no sólo de las nociones básicas de la función derivada, sino también conocimientos de la compleja estructura matemática de ésta, es decir estas propuestas pueden ser exitosas en el desarrollo de pensamiento matemático avanzado.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, E., Delgado, C., (1994) \Fréchet vs Caratheodory", *American Mathematical Monthly*, Vol. 101, No. 2, 4, April.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, Gómez, P. (Ed). pp 97-140. “Una Empresa Docente” & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.

Boyer, C. (1992), *Historia de la Matemática*, versión Española de Mariano Martínez Pérez, Alianza Universidad Textos, Madrid España.

Cantoral, R., Miron, H. (2000), Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, noviembre, año/vol 3, número 003. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, pp. 265-292

Keisler, J., (2007), Elementary Calculus, and infinitesimal approach, second Edition, University of Wisconsin. This work is licensed under the Creative Commons. Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/ or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California, 93405, USA

Caratheodory C., (1954), Theory of Functions of a Complex Variable, Chelsea, New York.

Fréchet, M., (1925), La Notion de differentielle dans l'analyse generale, C. R. Acad. Sci. (Paris), No. 180.

Kuhn S., (1991), The Derivative a la Caratheodory", American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1, January.

Nicolescu L. J., (1963), On Some Properties of the direct second order diferentials in Gateaux Sense", Review Mathematics Pures Appicated, No. 8.