

UNA INTRODUCCION A LA DERIVADA MEDIANTE LA VARIACION

AUTORES:

ARNALDO DE LA BARRERA CORREA

LENIS YELITZA SANTAFE ROJAS

RESUMEN

Esta presentación trata sobre el estudio de la derivada vista como una razón de cambio. Con él se pretende aportar elementos didácticos que conduzcan a un mejor desarrollo del proceso enseñanza y aprendizaje que se refleje en la comprensión de las ideas y conceptos básicos relacionados con la derivada. Se pretende mostrar su naturaleza variacional a partir del planteamiento y resolución de situaciones variacionales elementales.

1- INTRODUCCIÓN

Dado que se quiere desarrollar la naturaleza variacional del concepto se utiliza y explora el uso de la variable en una relación funcional (aspecto dinámico). De tal suerte que corresponde explorar las representaciones de la función y ver ésta como una relación de dependencia entre dos variables.

Con base en la reflexión anterior es clara la necesidad de realizar una revisión a la historia y al discurso escolar actual.

Según Moreno (1998):

Dentro de las estructuras curriculares del nivel medio y de la básica secundaria el proceso enseñanza/aprendizaje del cálculo continúa siendo un proceso conflictivo. Sobre todo en lo que respecta al aprendizaje de las ideas básicas de la derivada. Una de las posibles razones de este conflicto tiene su origen en el hecho que los textos de cálculo, están escritos dentro de una concepción del proceso enseñanza/aprendizaje que podemos llamar la pedagogía de la exposición.

Lo anterior se evidencia en los textos revisados en el presente estudio, en donde el concepto de derivada, se presenta en forma terminada y despersonalizada, privilegiando los procesos

algorítmicos, despojando al concepto de su esencia como es el estudio de la variación y el cambio. Teniendo en cuenta que el germen de la derivada se encuentra en el estudio de la variación, es necesario tomar elementos valiosos en la historia para la reconstrucción del discurso escolar.

Según Luis Moreno conocer la evolución histórica de un concepto permite acercarse a la didáctica, pues existe una vinculación muy fuerte entre ellas, ya que a nivel histórico y a nivel individual aparecen mecanismos análogos, como por ejemplo mecanismos de generalización y abstracción, los cuales permiten pasar de las concepciones a los conceptos (Ferrer, 1995).

El seguimiento epistemológico de la derivada muestra que fueron ciertas ideas y rupturas con el pensamiento griego (razones–homogéneas) las que hicieron posible su aparición como nuevo objeto matemático. Entre estas ideas podemos citar la mirada cualitativa (representación geométrica) presentada por Nicolás de Oresme (1323–1382) sobre el estudio del movimiento y cuyo objetivo era el análisis de los fenómenos que cambian. Con la teoría de longitudes y latitudes Oresme pretende que se entienda de manera más fácil y más rápida la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos. En esta obra, Oresme da cuenta de un método para representar, mediante una figura geométrica, las intensidades de una cualidad¹ de un objeto. De esta forma, Oresme “logró poner al servicio del estudio de la variación algunos recursos geométricos (Moreno, 1991 en Alanis, 1995).

Este trabajo de Oresme fue retomado por Galileo y explorado por Newton. En efecto, Galileo estudia el movimiento de forma cuantitativa dando justificaciones experimentales; las gráficas utilizadas por Galileo eran parecidas a las de Oresme, pero los métodos matemáticos desarrollados por él no le permitieron avanzar en la construcción matemática de la variación debido a que se encontraban fundamentados en la teoría griega de las proporciones ($e : e' = t : t'$ razón homogénea).

¹ Según Locke, existen cualidades primarias y secundarias, las cualidades primarias u objetivas –entre otros- el movimiento, la impenetrabilidad, la densidad, el encadenamiento de las partículas, la figura y la extensión; las cualidades secundarias o subjetivas (color, olor, sabor y sonido). Diccionario filosófico (Rosental-IUDIN-1997).

En el siglo XVI, el problema central de la física fue el estudio del movimiento. Como reflejo de las propiedades generales del concepto de cambio aparecen en la matemática los conceptos de magnitud variable y de función, con esto se abre camino la matemática de las magnitudes variables; los conceptos matemáticos de variable y función son generalizaciones abstractas de variables concretas (tiempo, distancia, velocidad, etc.) (Aleksandrov, 1980).

El siguiente paso decisivo en el estudio de la variación y de las magnitudes variables fue dado por Newton y Leibnitz durante la segunda mitad del siglo XVII al sentar las bases del cálculo diferencial. El objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones mismas.

A Newton se debe la interpretación geométrica – cinemática de los conceptos fundamentales de la derivada en los que, tomando el tiempo como argumento², analiza las variables dependientes como cantidades continuas que poseen una determinada velocidad de cambio (Cálculo de fluxiones).

“El trabajo de Newton permitió conectar los problemas de la mecánica con los de la geometría”, gracias al método de las coordenadas fue posible hacer una representación gráfica de la dependencia de una variable respecto a la otra. Siendo así, el cálculo diferencial es básicamente un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. El problema que se planteaba, en la época, era encontrar la velocidad en cualquier instante. Newton estuvo frente a un obstáculo epistemológico al llegar a un proceso de la forma (\emptyset/\emptyset) , resultado que fue fuertemente criticado, aún cuando el proceso funcionaba, presentaba un problema de fundamentación, el cual sólo fue resuelto hasta los años (1823 – 1850) cuando los matemáticos Cauchy y Karl Weirstrass pusieron final a la frase “Tan cerca como se quiere”, definiendo en forma rigurosa la derivada como:

² La variable como argumento aparece cuando el estudio del álgebra se aborda desde el estudio de relaciones entre cantidades. Aquí las variables varían. Ejemplo: ¿Qué pasa con el valor de $1/x$ cuando x se hace más y más grande?. En este caso la variable representa un valor del dominio de una función (Usiskin, 1998)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Obsérvese cómo los conceptos físicos de movimiento se han sustituido por un conjunto de hechos estáticos.

Bajo la dinámica anterior es claro que la idea central de la derivada está fundamentada en el estudio de la variación, y que de cierta manera una incursión en este camino podrá favorecer la construcción del sentido dentro de la matemática (Moreno, 1998).

2. ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS EN TORNO A LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA Y LA VARIACIÓN

- a. En torno al estudio de la variación en contextos físicos** (experimentos reales y pensados). Entre estos trabajos sobresalen los orientados al estudio de la variación, mediante situaciones físicas, cotidianas (del entorno del estudiante) y experimentales Zubieta (1996); Esquinca (Cinvestav). Las preguntas son de tipo cualitativo y cuantitativo.
- b. En torno al estudio de la variación en contextos cotidianos y desde las matemáticas.** En éste grupo sobresalen los trabajos de Ursini (1994), Ursini y Trigueros (2000); HITT (1995); HOYOS (1994); GUZMÁN (1992). Estos Trabajos básicamente quieren indagar sobre las dificultades que se puedan presentar al estudiar la variación conjunta al interior de una representación y la articulación de diferentes registros de representación.
- c. Construcción de la noción de derivada a través de la variación y la razón de cambio.** De la física, economía, de las matemáticas; en este grupo sobresalen los trabajos de: Dolores (1998); Wenzelburger (1993); Alanis y otros, (2000); Azcarate (1990); Azcarate y otros (1996); la idea central de éstas propuestas es recuperar el camino natural hacia la construcción del concepto de derivada.

3. BIBLIOGRAFIA

Azcarate Carmen y Deulofeu Jordi. (1990). Funciones y gráficas. Editorial Síntesis.

Badillo Gonzalo Z. Tesis de Doctorado en la especialidad de Matemática Educativa, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV (1996).

Cantoral U. Ricardo, Farfán M. Rosa M. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. Editorial Thompson.

Dieudonné J., M. Loi y R Thom (1999). Pensar la matemática. Tusquets Editores. Barcelona España-

Dolores (1998); Wenzelburger (1993); Construcción de la noción de derivada a través de la variación y la razón de cambio. (Cinvestav)

Esquina Miguel S. (2001). El fenómeno de propagación del calor. Departamento de matemática educativa CINVESTAV – IPN, MÉXICO.

Hitt E. Fernando (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una presentación gráfica a un contexto real y viceversa. CINVESTAV – I.P.N., PNFAPM. México.

Trigueros M, Ursini S (2000).La conceptualización de la variable en la enseñanza Media.. Instituto Tecnológico Autónomo de México. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.

Ursini L.Sonia (1994). Los niños y las variables. . Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV – IPN.

Ursini y Trigueros (2000); En torno al estudio de la variación en contextos cotidianos y desde las matemáticas. (Cinvestav)