CURIOSIDADES MATEMÁTICAS
MÉTODO DE SARRUS GENERALIZADO

JOSÉ FRANCISCO LEGUIZAMÓN ROMERO[1]
GRUPO DE INVESTIGACIÓN PIRÁMIDE
LÍNEA MEDIOS EDUCATIVOS EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

1. INTRODUCCIÓN.

Desde hace unos años existe la curiosidad de saber por qué en todo texto de Algebra Lineal se encuentra "método de Sarrus válido únicamente para orden tres (3)", de manera natural surge la pregunta: cómo es el método de Sarrus para orden cuatro (4), para orden cinco (5), y para cualquier orden arbitrario.

Así pues, se trabajó en esa dirección y se presenta el método de Sarrus para orden cuatro (4) con su demostración y algunos ejemplos, el cual sigue siendo práctico para la solución usual de determinantes; adicionalmente se presenta el método para orden cinco (5) con su demostración y ejemplo, destacando que ya no es práctico aplicarlo por su extensión pues habría que solucionar veinte (20) determinantes. Finalmente se muestra como se complementaría un determinante de orden n para la aplicación del método de Sarrus y se explica cómo sería su posible desarrollo. Se aclara que estos resultados no fueron encontrados en la Bibliografía consultada ni en páginas de internet. Es bueno resaltar, que para demostrar que el método es válido para los órdenes cuatro (4) y cinco (5), se realiza comparando los resultados del método de Sarrus con el desarrollo del teorema de Laplace.

2. BIOGRAFÍA DE PIERRE FRÉDERIC SARRUS

Matemático Francés, nació el 10 de marzo de 1798 en Saint-Affrique, falleció el 20 de noviembre de 1861.

En1815, Sarrus dudaba entre escoger Medicina o Matemáticas para continuar su carrera. El rechazo del alcalde de Saint-Affrique de otorgarle un certificado de buena vida dados sus orígenes protestantes le obligan a optar por la facultad de Ciencias.

1 Profesor Asociado, UPTC. Licenciado en Matemáticas. Especialista en Matemática Avanzada. Magister en Educación.

En Montpellier, en los años 1820 conoce a Gergonne y publica varios artículos y memorias en los *Annales de Gergonne*, una de las primeras revistas matemáticas.

En 1829 es nombrado profesor de Matemáticas en la facultad de Ciencias de Estrasburgo de la cual es decano entre 1839 y 1852. Durante esta época publica la mayoría de sus trabajos en el *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville. Sin embargo tiene problemas de salud y se retira en 1858.

Sus trabajos tratan sobre los métodos de resolución de ecuaciones numéricas y sobre el cálculo de variaciones. En 1853 resuelve uno de los problemas más complicados de la mecánica de las piezas articuladas: la transformación de movimientos rectilíneos alternativos en movimientos circulares uniformes.

Pero su celebridad entre los estudiantes de Matemáticas se explica sobre todo por una regla de cálculo de determinantes de matrices de orden 3 que lleva su nombre: la regla de Sarrus. Fue introducida en el artículo *Nouvelles méthodes pour la résolution des équations* publicado en Estrasburgo en 1833.

3. DETERMINANTES DE ORDEN CUATRO

A continuación se plantea el desarrollo de determinantes usando el teorema de Laplace (*El determinante de orden n, puede desarrollarse a partir de una fila o columna, reduciendo el problema al cálculo de un determinante de orden n-1. Para ello se toma una fila o columna cualquiera, multiplicando cada elemento por su adjunto (es decir, el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila y columna correspondiente a dicho elemento, multiplicado por* $(-1)^{i+j}$ *donde i es el número de fila y j el número de columna). La suma de todos los productos es igual al determinante)* y el método de Sarrus, para mostrar que se obtienen los mismos resultados.

3.1 DETERMINANTES DE ORDEN CUATRO USANDO EL TEOREMA DE LAPLACE.

Una forma conocida de solucionar determinantes es usando el Teorema de Laplace.

Dado $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ donde cada a_{ij} es número real, con $1 \le i \le 4$ y $1 \le j \le 4$,

se tiene

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Solucionando cada determinante por Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = (a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{42}a_{23}a_{34}) - (a_{32}a_{23}a_{44} + a_{22}a_{43}a_{34} + a_{42}a_{33}a_{24})$$

$$= a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{42}a_{23}a_{34} - a_{32}a_{23}a_{44} - a_{22}a_{43}a_{34} - a_{42}a_{33}a_{24}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = (a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{41}a_{23}a_{34}) - (a_{31}a_{23}a_{44} + a_{21}a_{43}a_{34} + a_{41}a_{33}a_{24})$$

$$= a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{41}a_{23}a_{34} - a_{31}a_{23}a_{44} - a_{21}a_{43}a_{34} - a_{41}a_{33}a_{24}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33}) - (a_{31}a_{22}a_{43} + a_{21}a_{42}a_{33} + a_{41}a_{32}a_{23})$$

$$= a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33}) - (a_{31}a_{22}a_{43} + a_{21}a_{42}a_{33} + a_{41}a_{32}a_{23})$$

$$= a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23}$$

En conclusión se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{42}a_{23}a_{34} - a_{32}a_{23}a_{44} - a_{22}a_{43}a_{34} - a_{42}a_{33}a_{24}) \\
&- a_{12}(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{41}a_{23}a_{34} - a_{31}a_{23}a_{44} - a_{21}a_{43}a_{34} - a_{41}a_{33}a_{24}) \\
&+ a_{13}(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23}) \\
&- a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23})
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}) \\
&- (a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} + a_{12}a_{41}a_{23}a_{34} - a_{12}a_{31}a_{23}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{43}a_{34} - a_{12}a_{41}a_{33}a_{24}) \\
&+ (a_{13}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{13}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{13}a_{41}a_{32}a_{23}) \\
&- (a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{14}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{14}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{14}a_{41}a_{32}a_{23})
\end{aligned}$$

3.2 DETERMINANTES DE ORDEN CUATRO POR EL MÉTODO DE SARRUS.

La propuesta de desarrollo se logra obteniendo cuatro (4) determinantes ampliados con la segunda, tercera y primera filas respectivamente. En el primer determinante se deja el orden inicial, en el segundo cambia la primera columna por la segunda, en el tercer determinante la tercera columna pasa de primera y las demás se corren y en el cuarto determinante se pasa la cuarta columna de primera y las demás se corren, los signos de los determinantes van alternos, así:

Sea $\quad \Delta = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \Delta_i$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \end{vmatrix}
$$

Todos los determinantes ampliados se solucionan de la misma manera, la diagonal 1, más la semidiagonal 2, más la semidiagonal 3, menos la suma de la transversal 1, la semitransversal 2 y la semitransversal 3. (Obsérvese el rayado de los determinantes).

Para Δ_1:

Diagonal 1 $\longrightarrow a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ Semidiagonal 2 $\longrightarrow a_{11}a_{32}a_{43}a_{24}$ Semidiagonal 3 $\longrightarrow a_{11}a_{42}a_{23}a_{34}$

Transver 1 $\longrightarrow a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$ Semitransver 2 $\longrightarrow a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}$ Semitransver 3 $\longrightarrow a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}$

entonces:

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}$$

Para el segundo determinante ampliado Δ_2:

Diagonal 1 $\longrightarrow a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ Semidiagonal 2 $\longrightarrow a_{12}a_{31}a_{43}a_{24}$ Semidiagonal 3 $\longrightarrow a_{12}a_{41}a_{23}a_{34}$

Transver 1 $\longrightarrow a_{12}a_{31}a_{23}a_{44}$ Semitransver 2 $\longrightarrow a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}$ Semitransver 3 $\longrightarrow a_{12}a_{41}a_{33}a_{24}$

luego:

$$\Delta_2 = a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} + a_{12}a_{41}a_{23}a_{34} - a_{12}a_{31}a_{23}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{43}a_{34} - a_{12}a_{41}a_{33}a_{24}$$

Para Δ_3:

Diagonal 1 $\longrightarrow a_{13}a_{21}a_{32}a_{43}$ Semidiagonal 2 $\longrightarrow a_{13}a_{31}a_{42}a_{23}$ Semidiagonal 3 $\longrightarrow a_{13}a_{41}a_{22}a_{33}$

Transver 1 $\longrightarrow a_{13}a_{31}a_{22}a_{43}$ Semitransver 2 $\longrightarrow a_{13}a_{21}a_{42}a_{33}$ Semitransver 3 $\longrightarrow a_{13}a_{41}a_{32}a_{23}$

Así:

$$\Delta_3 = a_{13}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{13}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{13}a_{41}a_{32}a_{23}$$

Para el cuarto determinante ampliado Δ_4:

Diagonal 1 $\longrightarrow a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ Semidiagonal 2 $\longrightarrow a_{13}a_{31}a_{42}a_{23}$ Semidiagonal 3 $\longrightarrow a_{13}a_{41}a_{22}a_{33}$

Transver 1 $\longrightarrow a_{14}a_{31}a_{22}a_{43}$ Semitransver 2 $\longrightarrow a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}$ Semitransver 3 $\longrightarrow a_{14}a_{41}a_{32}a_{23}$

Luego:

$$\Delta_4 = a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{14}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{14}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{14}a_{41}a_{32}a_{23}$$

Así se concluye que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
= &\left(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}\right) \\
- &\left(a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} + a_{12}a_{41}a_{23}a_{34} - a_{12}a_{31}a_{23}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{43}a_{34} - a_{12}a_{41}a_{33}a_{24}\right) \\
+ &\left(a_{13}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{13}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{13}a_{41}a_{32}a_{23}\right) \\
- &\left(a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{31}a_{42}a_{23} + a_{14}a_{41}a_{22}a_{33} - a_{14}a_{31}a_{22}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{14}a_{41}a_{32}a_{23}\right)
\end{aligned}$$

Se demostró que para orden cuatro (4) es válido el desarrollo por el método de Sarrus ya que la respuesta es la misma que la obtenida por la aplicación del Teorema de Laplace.

3.3 CASOS PARTICULARES DE DETERMINANTES DE ORDEN CUATRO DESARROLLADOS POR EL MÉTODO DE SARRUS.

Ejemplo 1:

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Así:

$$\{(8+72+0)-(0+12-12)\}-\{(-2+9+0)-(0-3-12)\}+\{(12+9+12)-(-6-3+72)\}$$
$$-\{(48+0+32)-(-24-8+0)\}=\{80-0\}-\{7-(-15)\}+\{33-63\}-\{80-(-32)\}=$$
$$80-22-30-112=-84$$

Luego

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -84$$

Ejemplo 2:

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Así:

$$\{(9-4+4)-(-4-3-12)\}-\{(24-4-12)-(-4-8+36)\}+\{(-24+12-27)-(-9+24-36)\}$$
$$-\{(-32+16+108)-(-12-96-48)\}=\{9-(-19)\}-\{8-(24)\}+\{-39-(-21)\}-\{92-(-156)\}=$$
$$28+16-18-248=-222$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -222$$

4. DETERMINANTES DE ORDEN CINCO

Se seguirá el mismo proceso que se utilizó para el desarrollo de determinantes de orden cuatro (4), es decir, se plantea el desarrollo de determinantes de orden cinco (5), usando el Teorema de Laplace y el método de Sarrus, para mostrar que se obtienen los mismos resultados.

4.1 DETERMINANTES DE ORDEN CINCO USANDO EL TEOREMA DE LAPLACE.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ donde cada a_{ij} es número real, con $1 \le i \le 5$ y $1 \le j \le 5$,

se tiene

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$- a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} + a_{15}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

Desarrollando cada determinante por el método de Sarrus:

- Para el primer determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{54} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix}
a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
a_{55} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\
a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{22}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{22}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{22}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{22}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{22}a_{53}a_{44}a_{35}) \\
&- (a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{23}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} - a_{23}a_{52}a_{44}a_{35}) \\
&+ (a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{24}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{24}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{24}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{24}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{24}a_{52}a_{43}a_{35}) \\
&- (a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{25}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{25}a_{52}a_{43}a_{34})
\end{aligned}
$$

- Para el segundo determinante:

$$
\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25}
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\
a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\
a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\
a_{53} & a_{51} & a_{54} & a_{55} \\
a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\
a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\
a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{25}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \\
a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\
a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\
a_{54} & a_{51} & a_{53} & a_{55} \\
a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\
a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\
a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{25}
\end{vmatrix}
$$

$$
-\begin{vmatrix}
a_{25} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\
a_{35} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{45} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\
a_{55} & a_{51} & a_{53} & a_{54} \\
a_{35} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{45} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\
a_{25} & a_{21} & a_{23} & a_{24}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{21}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{21}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{21}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{21}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}) \\
&- (a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{23}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{23}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{23}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{23}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}) \\
&+ (a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{24}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{24}a_{51}a_{33}a_{45} - a_{24}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{24}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}) \\
&- (a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{25}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{25}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{25}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{25}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{25}a_{51}a_{43}a_{34})
\end{aligned}
$$

- Para el tercer determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{51} & a_{54} & a_{55} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{55} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{25} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{54} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{21}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{21}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{21}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{21}a_{32}a_{54}a_{45} - a_{21}a_{52}a_{44}a_{35})$$

$$- (a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{22}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{22}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{22}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{22}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{22}a_{51}a_{44}a_{35})$$

$$+ (a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{24}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{24}a_{51}a_{32}a_{45} - a_{24}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{24}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{24}a_{51}a_{42}a_{35})$$

$$- (a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{25}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{25}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{25}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{25}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{25}a_{51}a_{42}a_{34})$$

- Para el cuarto determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{55} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{55} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{25} \end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix} a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{21}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{21}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{21}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{21}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}) \\
&- (a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{22}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{22}a_{51}a_{33}a_{45} - a_{22}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{22}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}) \\
&+ (a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{23}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{23}a_{51}a_{32}a_{45} - a_{23}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{23}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}) \\
&- (a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{25}a_{41}a_{52}a_{33} + a_{25}a_{51}a_{32}a_{43} - a_{25}a_{41}a_{32}a_{53} - a_{25}a_{31}a_{52}a_{43} - a_{25}a_{51}a_{42}a_{33})
\end{aligned}
$$

- Para el quinto determinante:

$$
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{54} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{54} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}
$$

$$
-\begin{vmatrix} a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{21}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{21}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{21}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{21}a_{52}a_{43}a_{34}) \\
&- (a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{22}a_{51}a_{43}a_{34}) \\
&+ (a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{23}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{23}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{23}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{23}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{23}a_{51}a_{42}a_{34}) \\
&- (a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{24}a_{41}a_{52}a_{33} + a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} - a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} - a_{24}a_{51}a_{42}a_{33})
\end{aligned}
$$

En conclusión se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\left\{\begin{array}{l} (a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{22}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{22}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{22}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{22}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{22}a_{53}a_{44}a_{35}) \\ -(a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{23}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} - a_{23}a_{52}a_{44}a_{35}) \\ +(a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{24}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{24}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{24}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{24}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{24}a_{52}a_{43}a_{35}) \\ -(a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{25}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}) \end{array}\right\}$$

$$-a_{12}\left\{\begin{array}{l} (a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{21}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{21}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{21}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{21}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}) \\ -(a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{23}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{23}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{23}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{23}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}) \\ +(a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{24}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{24}a_{51}a_{33}a_{45} - a_{24}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{24}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}) \\ -(a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{25}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{25}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{25}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{25}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}) \end{array}\right\}$$

$$+a_{13}\left\{\begin{array}{l} (a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{21}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{21}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{21}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{21}a_{32}a_{54}a_{45} - a_{21}a_{52}a_{44}a_{35}) \\ -(a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{22}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{22}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{22}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{22}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{22}a_{51}a_{44}a_{35}) \\ +(a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{24}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{24}a_{51}a_{32}a_{45} - a_{24}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{24}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{24}a_{51}a_{42}a_{35}) \\ -(a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{25}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{25}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{25}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{25}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}) \end{array}\right\}$$

$$-a_{14}\left\{\begin{array}{l} (a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{21}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{21}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{21}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{21}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}) \\ -(a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{22}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{22}a_{51}a_{33}a_{45} - a_{22}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{22}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}) \\ +(a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{23}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{23}a_{51}a_{32}a_{45} - a_{23}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{23}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}) \\ -(a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{25}a_{41}a_{52}a_{33} + a_{25}a_{51}a_{32}a_{43} - a_{25}a_{41}a_{32}a_{53} - a_{25}a_{31}a_{52}a_{43} - a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}) \end{array}\right\}$$

$$+a_{15}\left\{\begin{array}{l} (a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{21}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{21}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{21}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{21}a_{52}a_{43}a_{34}) \\ -(a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{22}a_{51}a_{43}a_{34}) \\ +(a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{23}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{23}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{23}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{23}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{23}a_{51}a_{42}a_{34}) \\ -(a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{24}a_{41}a_{52}a_{33} + a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} - a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} - a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} - a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}) \end{array}\right\}$$

Es decir el resultado final del determinante de orden 5 será:

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{11}a_{22}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}a_{45}$$
$$-a_{11}a_{22}a_{53}a_{44}a_{35} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} - a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55}$$
$$+a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{11}a_{24}a_{52}a_{33}a_{45}$$
$$-a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{11}a_{24}a_{52}a_{43}a_{35} - a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34}$$
$$-a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}.$$
$$-(a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{12}a_{21}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}a_{45}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{53}a_{44}a_{35} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35} - a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45} + a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45} + a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{12}a_{24}a_{51}a_{33}a_{45}$$
$$-a_{12}a_{24}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{12}a_{24}a_{51}a_{43}a_{35} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34}$$
$$-a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54} + a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44} + a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}).$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{13}a_{21}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}a_{45}$$
$$-a_{13}a_{21}a_{52}a_{44}a_{35} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35} - a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45} + a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55}$$
$$+a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45} + a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{13}a_{24}a_{51}a_{32}a_{45}$$
$$-a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{13}a_{24}a_{51}a_{42}a_{35} - a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34}$$
$$-a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44} + a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}.$$
$$-(a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{14}a_{21}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}a_{45}$$
$$-a_{14}a_{21}a_{52}a_{43}a_{35} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55} - a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35} - a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45} + a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}$$
$$+a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45} + a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}$$
$$-a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{14}a_{23}a_{51}a_{42}a_{35} - a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}$$
$$-a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53} + a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43} + a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}).$$
$$+a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{15}a_{21}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{15}a_{21}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}a_{44}$$
$$-a_{15}a_{21}a_{52}a_{43}a_{34} - a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} - a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54}$$
$$+a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34} + a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{15}a_{23}a_{51}a_{32}a_{44}$$
$$-a_{15}a_{23}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{15}a_{23}a_{51}a_{42}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33}$$
$$-a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} + a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} + a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}.$$

4.2 DETERMINANTES DE ORDEN CINCO POR EL MÉTODO DE SARRUS.

El desarrollo se realiza obteniendo cinco (5) determinantes ampliados con la tercera, cuarta, segunda y primera filas respectivamente. En el primer determinante se deja el orden inicial, en el segundo cambia la primera columna por la segunda, en el tercer determinante la tercera columna pasa de primera y las demás se corren y en el cuarto determinante se pasa la cuarta columna de primera y las demás se corren, igual proceso para la quinta columna, los signos de los determinantes van alternos:

$\Delta = \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i+1} \Delta_i$, así

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$$

Todos los determinantes ampliados se solucionan de la misma forma. Su primera columna se deja fija y las demás columnas se rotan al mismo estilo de los determinantes de orden cuatro. Así:

- Para Δ_1 se tienen los cuatro determinantes:

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \Delta_{1i}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{54} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \\ a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{55} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{31} & a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$$

El desarrollo es similar para los de orden cuatro, la diagonal 1, más la semidiagonal 2, más la semidiagonal 3, menos la suma de la transversal 1, la semitransversal 2 y la semitransversal 3. (Obsérvese el rayado de los determinantes).

Para Δ_{11}:

Diagonal 1 ➔ $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{11}a_{22}a_{53}a_{34}a_{45}$

Transver 1 ➔ $a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 ➔ $a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 ➔ $a_{11}a_{22}a_{53}a_{44}a_{35}$

así:

$$\Delta_{11} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{11}a_{22}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{11}a_{22}a_{53}a_{44}a_{35}$$

Ahora para Δ_{12}:

Diagonal 1 ➔ $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45}$

Transver 1 → $a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35}$

Luego:

$$\Delta_{12} = -(a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} + a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} - a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} - a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35})$$

es decir

$$\Delta_{12} = -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} - a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35}$$

Para Δ_{13}:

Diagonal 1 → $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55}$ Semidiagonal 2 → $a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}a_{35}$ Semidiagonal 3 → $a_{11}a_{24}a_{52}a_{33}a_{45}$

Transver 1 → $a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{11}a_{24}a_{52}a_{43}a_{35}$

entonces:

$$\Delta_{13} = a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{11}a_{24}a_{52}a_{33}a_{45} - a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{11}a_{24}a_{52}a_{43}a_{35}$$

Para Δ_{14}:

Diagonal 1 → $a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54}$ Semidiagonal 2 → $a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34}$ Semidiagonal 3 → $a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44}$

Transver 1 → $a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54}$ Semitransver 2 → $a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44}$ Semitransver 3 → $a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}$

así:

$$\Delta_{14} = -(a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34})$$

es decir

$$\Delta_{14} = -a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34} - a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}$$

En conclusión el resultado del primer determinante ampliado es:

$$\begin{aligned}\Delta_1 = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{11}a_{22}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}a_{45} \\ & - a_{11}a_{22}a_{53}a_{44}a_{35} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} - a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35} - a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55} \\ & + a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} + a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55} + a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}a_{35} + a_{11}a_{24}a_{52}a_{33}a_{45} \\ & - a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}a_{55} - a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}a_{45} - a_{11}a_{24}a_{52}a_{43}a_{35} - a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54} - a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34} \\ & - a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54} + a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44} + a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}.\end{aligned}$$

- Para Δ_2:

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \Delta_{2i} \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{51} & a_{54} & a_{55} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{51} & a_{53} & a_{55} \\ a_{32} & a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{22} & a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{12} & a_{14} & a_{11} & a_{13} & a_{15} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{25} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{35} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{45} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{55} & a_{51} & a_{53} & a_{54} \\ a_{32} & a_{35} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{45} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{22} & a_{25} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{12} & a_{15} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$$

Para Δ_{21}:

Diagonal 1 ➔ $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{12}a_{21}a_{53}a_{34}a_{45}$

Transver 1 ➔ $a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 ➔ $a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 ➔ $a_{12}a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}$

luego:

$$\Delta_{21} = a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}a_{35} + a_{12}a_{21}a_{53}a_{34}a_{45} - a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}a_{45} - a_{12}a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}$$

Para Δ_{22}:

Diagonal 1 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45}$

Transver 1 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 $\rightarrow a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}$

así:

$$\Delta_{22} = -(a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35})$$

es decir

$$\Delta_{22} = -a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35} - a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45} + a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45} + a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}$$

para Δ_{23}:

Diagonal 1 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}$ Semidiagonal 2 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}$ Semidiagonal 3 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{51}a_{33}a_{45}$

Transver 1 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{41}a_{33}a_{55}$ Semitransver 2 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}a_{45}$ Semitransver 3 $\rightarrow a_{12}a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}$

luego:

$$\Delta_{23} = a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55} + a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35} + a_{12}a_{24}a_{51}a_{33}a_{45} - a_{12}a_{24}a_{41}a_{33}a_{55} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}a_{45} - a_{12}a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}$$

Para Δ_{24}:

Diagonal 1 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$ Semidiagonal 2 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34}$ Semidiagonal 3 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44}$

Transver 1 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54}$ Semitransver 2 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44}$ Semitransver 3 $\rightarrow a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}$

así:

$$\Delta_{24} = -(a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34})$$

es decir

$$\Delta_{24} = -a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34} - a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54} + a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44} + a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}$$

En conclusión el resultado del segundo determinante ampliado de orden cinco (5) es:

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 = \quad & a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}+a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}a_{35}+a_{12}a_{21}a_{53}a_{34}a_{45}-a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}a_{45}\\
&-a_{12}a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}-a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55}-a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35}-a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45}+a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55}\\
&+a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45}+a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}+a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}+a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}+a_{12}a_{24}a_{51}a_{33}a_{45}\\
&-a_{12}a_{24}a_{41}a_{33}a_{55}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}a_{45}-a_{12}a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}-a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}-a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34}\\
&-a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54}+a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44}+a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}.
\end{aligned}
$$

- Para Δ_3:

$$
\begin{vmatrix}
a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15}\\
a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25}\\
a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35}\\
a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45}\\
a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55}\\
a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35}\\
a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45}\\
a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25}\\
a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15}
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{15}\\
a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25}\\
a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35}\\
a_{43} & a_{42} & a_{41} & a_{44} & a_{45}\\
a_{53} & a_{52} & a_{51} & a_{54} & a_{55}\\
a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{35}\\
a_{43} & a_{42} & a_{41} & a_{44} & a_{45}\\
a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{25}\\
a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{15}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{15}\\
a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{25}\\
a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{35}\\
a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{45}\\
a_{53} & a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{55}\\
a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{35}\\
a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{45}\\
a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{25}\\
a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{15}
\end{vmatrix}
$$

$$
-
\begin{vmatrix}
a_{13} & a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{14}\\
a_{23} & a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{24}\\
a_{33} & a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{34}\\
a_{43} & a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{44}\\
a_{53} & a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{54}\\
a_{33} & a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{34}\\
a_{43} & a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{44}\\
a_{23} & a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{24}\\
a_{13} & a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{14}
\end{vmatrix}
$$

Para Δ_{31}:

Diagonal 1 → $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 → $a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 → $a_{13}a_{21}a_{52}a_{34}a_{45}$

Transver 1 → $a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{13}a_{21}a_{52}a_{44}a_{35}$

Así:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{31} = \quad & a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}+a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}a_{35}+a_{13}a_{21}a_{52}a_{34}a_{45}-a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}a_{55}-a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}a_{45}\\
&-a_{13}a_{21}a_{52}a_{44}a_{35}
\end{aligned}
$$

Para Δ_{32}:

Diagonal 1 → $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}$ Semidiagonal 2 → $a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35}$ Semidiagonal 3 → $a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45}$

Transver 1 → $a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35}$

luego:

$$\Delta_{32} = -(a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35} + a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45} - a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45} - a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35})$$

es decir

$$\Delta_{32} = -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55} - a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35} - a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45} + a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45} + a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35}$$

Para Δ_{33}:

Diagonal 1 → $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}$ Semidiagonal 2 → $a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}a_{35}$ Semidiagonal 3 → $a_{13}a_{24}a_{51}a_{32}a_{45}$

Transver 1 → $a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{13}a_{24}a_{51}a_{42}a_{35}$

entonces:

$$\Delta_{33} = a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55} + a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}a_{35} + a_{13}a_{24}a_{51}a_{32}a_{45} - a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}a_{55} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}a_{45} - a_{13}a_{24}a_{51}a_{42}a_{35}$$

Para Δ_{34}:

Diagonal 1 → $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$ Semidiagonal 2 → $a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34}$ Semidiagonal 3 → $a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44}$

Transver 1 → $a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54}$ Semitransver 2 → $a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44}$ Semitransver 3 → $a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}$

así:

$$\Delta_{34} = -(a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34})$$

es decir

$$\Delta_{34} = -a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54} - a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34} - a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54} + a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44} + a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}$$

En conclusión el resultado del tercer determinante ampliado de orden cinco (5) es:

$$\begin{aligned}\Delta_3 = \; & a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}+a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}a_{35}+a_{13}a_{21}a_{52}a_{34}a_{45}-a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}a_{55}-a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}a_{45}\\ & -a_{13}a_{21}a_{52}a_{44}a_{35}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}-a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35}-a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45}+a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55}\\ & +a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45}+a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}+a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}a_{35}+a_{13}a_{24}a_{51}a_{32}a_{45}\\ & -a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}a_{55}-a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}a_{45}-a_{13}a_{24}a_{51}a_{42}a_{35}-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}-a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34}\\ & -a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54}+a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44}+a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}.\end{aligned}$$

- Para Δ_4:

$$\begin{vmatrix} a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15}\\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25}\\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35}\\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45}\\ a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55}\\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35}\\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45}\\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25}\\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{15}\\ a_{24} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{25}\\ a_{34} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{35}\\ a_{44} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{45}\\ a_{54} & a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{55}\\ a_{34} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{35}\\ a_{44} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{45}\\ a_{24} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{25}\\ a_{14} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{15}\\ a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{25}\\ a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{35}\\ a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{45}\\ a_{54} & a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{55}\\ a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{35}\\ a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{45}\\ a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{25}\\ a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{15} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{24} & a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{34} & a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{44} & a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{54} & a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{53}\\ a_{34} & a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{44} & a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{24} & a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{14} & a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Para Δ_{41}:

Diagonal 1 → $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$ Semidiagonal 2 → $a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}a_{35}$ Semidiagonal 3 → $a_{14}a_{21}a_{52}a_{33}a_{45}$

Transver 1 → $a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}a_{55}$ Semitransver 2 → $a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}a_{45}$ Semitransver 3 → $a_{14}a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}$

entonces:

Δ_{41} = $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}+a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}a_{35}+a_{14}a_{21}a_{52}a_{33}a_{45}-a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}a_{55}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}a_{45}$
$-a_{14}a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}$

Para Δ_{42}:

Diagonal 1 ➔ $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45}$

Transver 1 ➔ $a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}$ Semitransver 2 ➔ $a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45}$ Semitransver 3 ➔ $a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}$

así:

Δ_{42} = $-(a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}+a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35}+a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45}-a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}-a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45}$
$-a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35})$

es decir

Δ_{42} = $-a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}-a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35}-a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45}+a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45}$
$+a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}$

Para Δ_{43}:

Diagonal 1 ➔ $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}a_{35}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}$

Transver 1 ➔ $a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}a_{55}$ Semitransver 2 ➔ $a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}a_{45}$ Semitransver 3 ➔ $a_{14}a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}$

luego:

Δ_{43} = $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}+a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}a_{35}+a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}-a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}a_{55}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}a_{45}$
$-a_{14}a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}$

Para Δ_{44}:

Diagonal 1 ➔ $a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}$ Semidiagonal 2 ➔ $a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}$ Semidiagonal 3 ➔ $a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43}$

Transver 1 ➔ $a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53}$ Semitransver 2 ➔ $a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43}$ Semitransver 3 ➔ $a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}$

así:

$$\begin{aligned}\Delta_{44} \;=\; & -(a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}+a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}+a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53}-a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43}\\ & -a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33})\\ & \textit{es decir}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{44} \;=\; & -a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}-a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}-a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53}+a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43}\\ & +a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}\end{aligned}$$

En conclusión el resultado del cuarto determinante ampliado de orden cinco (5) es:

$$\begin{aligned}\Delta_{4} \;=\; & a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}+a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}a_{35}+a_{14}a_{21}a_{52}a_{33}a_{45}-a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}a_{55}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}a_{45}\\ & -a_{14}a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}-a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}-a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35}-a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45}+a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}\\ & +a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45}+a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}+a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}+a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}a_{35}+a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}\\ & -a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}a_{55}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}a_{45}-a_{14}a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}-a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}-a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}\\ & -a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53}+a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43}+a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}.\end{aligned}$$

- Para Δ_5:

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ a_{55} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54}\\ a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{45} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ a_{25} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{15} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14}\\ a_{25} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{35} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{45} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44}\\ a_{55} & a_{52} & a_{51} & a_{53} & a_{54}\\ a_{35} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{45} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44}\\ a_{25} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{15} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14}\\ a_{25} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{35} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{45} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44}\\ a_{55} & a_{53} & a_{51} & a_{52} & a_{54}\\ a_{35} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{45} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44}\\ a_{25} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{15} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{15} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{25} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{35} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{45} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{55} & a_{54} & a_{51} & a_{52} & a_{53}\\ a_{35} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{45} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43}\\ a_{25} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{15} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Para Δ_{51}:

Diagonal 1 → $a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}$ Semidiagonal 2 → $a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}a_{34}$ Semidiagonal 3 → $a_{15}a_{21}a_{52}a_{33}a_{44}$

Transver 1 → $a_{15}a_{21}a_{42}a_{33}a_{54}$ Semitransver 2 → $a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}a_{44}$ Semitransver 3 → $a_{15}a_{21}a_{52}a_{43}a_{34}$

así:

$$\Delta_{51} = a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{15}a_{21}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{15}a_{21}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}a_{44} - a_{15}a_{21}a_{52}a_{43}a_{34}$$

Para Δ_{52}:

Diagonal 1 → $a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}$ Semidiagonal 2 → $a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34}$ Semidiagonal 3 → $a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44}$

Transver 1 → $a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54}$ Semitransver 2 → $a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44}$ Semitransver 3 → $a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34}$

entonces:

$$\Delta_{52} = -(a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} + a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} - a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54} - a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} - a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34})$$

es decir

$$\Delta_{52} = -a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} - a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54} + a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34}$$

Para Δ_{53}:

Diagonal 1 → $a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}$ Semidiagonal 2 → $a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}a_{34}$ Semidiagonal 3 → $a_{15}a_{23}a_{51}a_{32}a_{44}$

Transver 1 → $a_{15}a_{23}a_{41}a_{32}a_{54}$ Semitransver 2 → $a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}a_{44}$ Semitransver 3 → $a_{15}a_{23}a_{51}a_{42}a_{34}$

así:

$$\Delta_{53} = a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{15}a_{23}a_{51}a_{32}a_{44} - a_{15}a_{23}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{15}a_{23}a_{51}a_{42}a_{34}$$

Para Δ_{53}:

Diagonal 1 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$ Semidiagonal 2 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33}$ Semidiagonal 3 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43}$

Transver 1 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53}$ Semitransver 2 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43}$ Semitransver 3 $\rightarrow a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}$

entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta_{53} &= -(a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33} + a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} - a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} - a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} \\
&\quad -a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}) \\
&\quad \textit{es decir} \\
\Delta_{53} &= -a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33} - a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} + a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} \\
&\quad +a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}
\end{aligned}$$

En conclusión el resultado del quinto determinante ampliado de orden cinco (5) es:

$$\begin{aligned}
\Delta_5 = \; & a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54} + a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}a_{34} + a_{15}a_{21}a_{52}a_{33}a_{44} - a_{15}a_{21}a_{42}a_{33}a_{54} - a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}a_{44} \\
& -a_{15}a_{21}a_{52}a_{43}a_{34} - a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54} - a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34} - a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54} \\
& +a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44} + a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34} + a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54} + a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}a_{34} + a_{15}a_{23}a_{51}a_{32}a_{44} \\
& -a_{15}a_{23}a_{41}a_{32}a_{54} - a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}a_{44} - a_{15}a_{23}a_{51}a_{42}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53} - a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33} \\
& -a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43} + a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53} + a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43} + a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}.
\end{aligned}$$

Así se concluye que:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + \Delta_5$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}+a_{11}a_{22}a_{43}a_{54}a_{35}+a_{11}a_{22}a_{53}a_{34}a_{45}-a_{11}a_{22}a_{43}a_{34}a_{55}-a_{11}a_{22}a_{33}a_{54}a_{45}\\
&-a_{11}a_{22}a_{53}a_{44}a_{35}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}-a_{11}a_{23}a_{42}a_{54}a_{35}-a_{11}a_{23}a_{52}a_{34}a_{45}+a_{11}a_{23}a_{42}a_{34}a_{55}\\
&+a_{11}a_{23}a_{32}a_{54}a_{45}+a_{11}a_{23}a_{52}a_{44}a_{35}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}a_{55}+a_{11}a_{24}a_{42}a_{53}a_{35}+a_{11}a_{24}a_{52}a_{33}a_{45}\\
&-a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}a_{55}-a_{11}a_{24}a_{32}a_{53}a_{45}-a_{11}a_{24}a_{52}a_{43}a_{35}-a_{11}a_{25}a_{32}a_{43}a_{54}-a_{11}a_{25}a_{42}a_{53}a_{34}\\
&-a_{11}a_{25}a_{52}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{25}a_{42}a_{33}a_{54}+a_{11}a_{25}a_{32}a_{53}a_{44}+a_{11}a_{25}a_{52}a_{43}a_{34}\\
&-(a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}+a_{12}a_{21}a_{43}a_{54}a_{35}+a_{12}a_{21}a_{53}a_{34}a_{45}-a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{54}a_{45}\\
&-a_{12}a_{21}a_{53}a_{44}a_{35}-a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55}-a_{12}a_{23}a_{41}a_{54}a_{35}-a_{12}a_{23}a_{51}a_{34}a_{45}+a_{12}a_{23}a_{41}a_{34}a_{55}\\
&+a_{12}a_{23}a_{31}a_{54}a_{45}+a_{12}a_{23}a_{51}a_{44}a_{35}+a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}+a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}+a_{12}a_{24}a_{51}a_{33}a_{45}\\
&-a_{12}a_{24}a_{41}a_{33}a_{55}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{53}a_{45}-a_{12}a_{24}a_{51}a_{43}a_{35}-a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}-a_{12}a_{25}a_{41}a_{53}a_{34}\\
&-a_{12}a_{25}a_{51}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{25}a_{41}a_{33}a_{54}+a_{12}a_{25}a_{31}a_{53}a_{44}+a_{12}a_{25}a_{51}a_{43}a_{34}).\\
&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55}+a_{13}a_{21}a_{42}a_{54}a_{35}+a_{13}a_{21}a_{52}a_{34}a_{45}-a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}a_{55}-a_{13}a_{21}a_{32}a_{54}a_{45}\\
&-a_{13}a_{21}a_{52}a_{44}a_{35}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}-a_{13}a_{22}a_{41}a_{54}a_{35}-a_{13}a_{22}a_{51}a_{34}a_{45}+a_{13}a_{22}a_{41}a_{34}a_{55}\\
&+a_{13}a_{22}a_{31}a_{54}a_{45}+a_{13}a_{22}a_{51}a_{44}a_{35}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}a_{55}+a_{13}a_{24}a_{41}a_{52}a_{35}+a_{13}a_{24}a_{51}a_{32}a_{45}\\
&-a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}a_{55}-a_{13}a_{24}a_{31}a_{52}a_{45}-a_{13}a_{24}a_{51}a_{42}a_{35}-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}-a_{13}a_{25}a_{41}a_{52}a_{34}\\
&-a_{13}a_{25}a_{51}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{25}a_{41}a_{32}a_{54}+a_{13}a_{25}a_{31}a_{52}a_{44}+a_{13}a_{25}a_{51}a_{42}a_{34}.\\
&-(a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}+a_{14}a_{21}a_{42}a_{53}a_{35}+a_{14}a_{21}a_{52}a_{33}a_{45}-a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}a_{55}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{53}a_{45}\\
&-a_{14}a_{21}a_{52}a_{43}a_{35}-a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}-a_{14}a_{22}a_{41}a_{53}a_{35}-a_{14}a_{22}a_{51}a_{33}a_{45}+a_{14}a_{22}a_{41}a_{33}a_{55}\\
&+a_{14}a_{22}a_{31}a_{53}a_{45}+a_{14}a_{22}a_{51}a_{43}a_{35}+a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}+a_{14}a_{23}a_{41}a_{52}a_{35}+a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}\\
&-a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}a_{55}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{52}a_{45}-a_{14}a_{23}a_{51}a_{42}a_{35}-a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}-a_{14}a_{25}a_{41}a_{52}a_{33}\\
&-a_{14}a_{25}a_{51}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{25}a_{41}a_{32}a_{53}+a_{14}a_{25}a_{31}a_{52}a_{43}+a_{14}a_{25}a_{51}a_{42}a_{33}).\\
&+a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}+a_{15}a_{21}a_{42}a_{53}a_{34}+a_{15}a_{21}a_{52}a_{33}a_{44}-a_{15}a_{21}a_{42}a_{33}a_{54}-a_{15}a_{21}a_{32}a_{53}a_{44}\\
&-a_{15}a_{21}a_{52}a_{43}a_{34}-a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}-a_{15}a_{22}a_{41}a_{53}a_{34}-a_{15}a_{22}a_{51}a_{33}a_{44}+a_{15}a_{22}a_{41}a_{33}a_{54}\\
&+a_{15}a_{22}a_{31}a_{53}a_{44}+a_{15}a_{22}a_{51}a_{43}a_{34}+a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}+a_{15}a_{23}a_{41}a_{52}a_{34}+a_{15}a_{23}a_{51}a_{32}a_{44}\\
&-a_{15}a_{23}a_{41}a_{32}a_{54}-a_{15}a_{23}a_{31}a_{52}a_{44}-a_{15}a_{23}a_{51}a_{42}a_{34}-a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}-a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33}\\
&-a_{15}a_{24}a_{51}a_{32}a_{43}+a_{15}a_{24}a_{41}a_{32}a_{53}+a_{15}a_{24}a_{31}a_{52}a_{43}+a_{15}a_{24}a_{51}a_{42}a_{33}.
\end{aligned}
$$

Se demostró que al igual que para los determinantes de orden cuatro (4), para orden cinco (5) es válido el desarrollo por el método de Sarrus ya que la respuesta es la misma que la obtenida por la aplicación del Teorema de Laplace.

4.3 CASO PARTICULAR DE DETERMINANTE DE ORDEN CINCO DESARROLLADO POR EL MÉTODO DE SARRUS.

Se aclara que no es práctico este método si se trata de solucionar determinantes de orden mayor o igual a 5. Sin embargo para mostrar que efectivamente se puede utilizar se presenta el siguiente ejemplo.

Determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Se hace el complemento agregando inicialmente la tercera fila, luego la cuarta, la segunda y la primera fila.

- Con el orden de columnas inicial dejando fija la primera columna y rotando las restantes, se obtienen los primeros cuatro determinantes ampliados.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\{(-24+6+24)-(96+6-6)\}-\{(32-4+32)-(-64-8-8)\}+\{(32+4-8)$$
$$-(16+8-8)\}-\{(4+8+4)-(2-4-16)\}$$
$$=\{6-96\}-\{60-(-80)\}+\{28-16\}-\{16-(-18)\}$$
$$=-90-140+12-34=-252$$

- Tomando como primera columna la segunda, dejándola fija y rotando las restantes, se obtienen los siguientes cuatro determinantes ampliados.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\{(-32+8+32)-(128+8-8)\}-\{(-48+4-48)-(64+12+12)\}+\{(-48-4+12)$$
$$-(-16-12+12)\}-\{(-6-8-6)-(-2+6+24)\}$$
$$=\{8-128\}-\{-92-88\}+\{-40+16\}-\{-20-28\}$$
$$=-120+180-24+48=84$$

- Tomando como primera columna la tercera, dejándola fija y rotando las restantes, se obtienen los siguientes cuatro determinantes ampliados.

$$
\begin{vmatrix}
4 & 2 & 2 & 4 & 6\\
2 & 4 & 3 & 2 & 1\\
-1 & -3 & 2 & 4 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
-1 & 3 & -2 & 1 & 4\\
-1 & -3 & 2 & 4 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
2 & 4 & 3 & 2 & 1\\
4 & 2 & 2 & 4 & 6
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
4 & 2 & 2 & 4 & 6\\
2 & 3 & 4 & 2 & 1\\
-1 & 2 & -3 & 4 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
-1 & -2 & 3 & 1 & 4\\
-1 & 2 & -3 & 4 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
2 & 3 & 4 & 2 & 1\\
4 & 2 & 2 & 4 & 6
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
4 & 4 & 2 & 2 & 6\\
2 & 2 & 4 & 3 & 1\\
-1 & 4 & -3 & 2 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
-1 & 1 & 3 & -2 & 4\\
-1 & 4 & -3 & 2 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
2 & 2 & 4 & 3 & 1\\
4 & 4 & 2 & 2 & 6
\end{vmatrix}
$$

$$
-
\begin{vmatrix}
4 & 6 & 2 & 2 & 4\\
2 & 1 & 4 & 3 & 2\\
-1 & 1 & -3 & 2 & 4\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & 4 & 3 & -2 & 1\\
-1 & 1 & -3 & 2 & 4\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
2 & 1 & 4 & 3 & 2\\
4 & 6 & 2 & 2 & 4
\end{vmatrix}
$$

$$
\left\{(128-16+128)-(-256-32-32)\right\}-\left\{(-144+12-144)-(192+36+36)\right\}+\{(96-16-48)
$$

$$
-(64-48-24)\}-\{(12-32+24)-(8+24-48)\}
$$

$$
=\{240+320\}-\{-276-264\}+\{32+8\}-\{4+16\}
$$

$$
=560+540+40-20=1120
$$

- Tomando como primera columna la cuarta, dejándola fija y rotando las restantes, se obtienen los siguientes cuatro determinantes ampliados.

$$
\begin{vmatrix}
4 & 2 & 2 & 4 & 6\\
2 & 4 & 3 & 2 & 1\\
4 & -3 & 2 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
1 & 3 & -2 & -1 & 4\\
4 & -3 & 2 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
2 & 4 & 3 & 2 & 1\\
4 & 2 & 2 & 4 & 6
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
4 & 2 & 2 & 4 & 6\\
2 & 3 & 4 & 2 & 1\\
4 & 2 & -3 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
1 & -2 & 3 & -1 & 4\\
4 & 2 & -3 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
2 & 3 & 4 & 2 & 1\\
4 & 2 & 2 & 4 & 6
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
4 & 4 & 2 & 2 & 6\\
2 & 2 & 4 & 3 & 1\\
4 & -1 & -3 & 2 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & -1 & 3 & -2 & 4\\
4 & -1 & -3 & 2 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
2 & 2 & 4 & 3 & 1\\
4 & 4 & 2 & 2 & 6
\end{vmatrix}
$$

$$
-\begin{vmatrix}
4 & 6 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\
4 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 4 & 3 & -2 & -1 \\
4 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\
4 & 6 & 2 & 2 & 4
\end{vmatrix}
$$

$$
\left\{(128+16-32)-(64+32-32)\right\}-\left\{(-144-12+36)-(-48-36+36)\right\}+\{(96-16-48)
$$

$$
-(64-48-24)\}-\{(-12+8+24)-(-8+24+12)\}
$$

$$
=\{112-64\}-\{-120+48\}+\{32+8\}-\{20-28\}
$$

$$
=48+72+40+8=168
$$

- Tomando como primera columna la quinta, dejándola fija y rotando las restantes, se obtienen los siguientes cuatro determinantes ampliados.

$$
\begin{vmatrix}
6 & 2 & 2 & 4 & 4 \\
1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\
1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
4 & 3 & -2 & -1 & 1 \\
1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\
6 & 2 & 2 & 4 & 4
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
6 & 2 & 2 & 4 & 4 \\
1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\
1 & 2 & -3 & -1 & 4 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & -2 & 3 & -1 & 1 \\
1 & 2 & -3 & -1 & 4 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\
6 & 2 & 2 & 4 & 4
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
6 & 4 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\
1 & -1 & -3 & 2 & 4 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
4 & -1 & 3 & -2 & 1 \\
1 & -1 & -3 & 2 & 4 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\
6 & 4 & 2 & 2 & 4
\end{vmatrix}
$$

$$
-\begin{vmatrix}
6 & 4 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\
1 & 4 & -3 & 2 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
4 & 1 & 3 & -2 & -1 \\
1 & 4 & -3 & 2 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\
6 & 4 & 2 & 2 & 4
\end{vmatrix}
$$

$$\{(48+96+48)-(24-48-192)\}-\{(-54-72-54)-(-18+54+216)\}+\{(36-96+72)$$
$$-(24+72-144)\}-\{(-36+24+72)-(-24+72+36)\}$$
$$=\{192+216\}-\{-180-252\}+\{12+48\}-\{60-84\}$$
$$=408+432+60+24=924$$

Resumiendo lo anterior se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -252 - (84)+1120-(168)+924 = 1540$$

5. MÉTODO DE SARRUS PARA DETERMINANTES DE ORDEN ARBITRARIO.

En general la forma de completar el determinante es agregar inicialmente la fila (n - 2), luego la fila (n - 1), a continuación sucesivamente las filas (n - 3), (n - 4), (n - 5),…,2,1.

Es decir, dado el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(n-3)} & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2(n-3)} & a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3(n-3)} & a_{3(n-2)} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4(n-3)} & a_{4(n-2)} & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-3)1} & a_{(n-3)2} & a_{(n-3)3} & a_{(n-3)4} & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} & a_{(n-3)(n-1)} & a_{(n-3)n} \\ a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & a_{(n-2)3} & a_{(n-2)4} & \cdots & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & a_{(n-2)n} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} & \cdots & a_{(n-1)(n-3)} & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n(n-3)} & a_{n(n-2)} & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

la forma de completarlo se presenta a continuación:

$$
\left|\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(n-3)} & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2(n-3)} & a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3(n-3)} & a_{3(n-2)} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4(n-3)} & a_{4(n-2)} & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{(n-3)1} & a_{(n-3)2} & a_{(n-3)3} & a_{(n-3)4} & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} & a_{(n-3)(n-1)} & a_{(n-3)n} \\
a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & a_{(n-2)3} & a_{(n-2)4} & \cdots & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & a_{(n-2)n} \\
a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} & \cdots & a_{(n-1)(n-3)} & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{n(n-3)} & a_{n(n-2)} & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\
\hdashline
a_{(n-2)1} & a_{(n-2)2} & a_{(n-2)3} & a_{(n-2)4} & \cdots & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & a_{(n-2)n} \\
a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} & \cdots & a_{(n-1)(n-3)} & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\
a_{(n-3)1} & a_{(n-3)2} & a_{(n-3)3} & a_{(n-3)4} & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} & a_{(n-3)(n-1)} & a_{(n-3)n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4(n-3)} & a_{4(n-2)} & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3(n-3)} & a_{3(n-2)} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2(n-3)} & a_{2(n-2)} & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(n-3)} & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & a_{1n}
\end{array}\right|
$$

Así aparecen inicialmente n determinantes ampliados, es decir el primero es el presentado anteriormente, el siguiente la segunda columna pasa de primera, enseguida la tercera pasa de primera y las demás columnas se corren(es decir la segunda columna es la primera inicial, la tercera la segunda y las demás continúan con su orden usual). Los signos de los determinantes van alternos iniciando por positivo. Su desarrollo es como aparece en el rayado.

Cada determinante de los mencionados, a su vez se soluciona de forma recursiva, es decir la primera columna ya se sabe que queda fija, entonces empiezan a rotar las segundas, si es del caso algunas segundas quedan fijas y se hacen rotar las terceras y así sucesivamente.

En total para solucionar un determinante de orden n, se solucionan $\frac{n!}{6}$ determinantes ampliados, con $n \geq 3$.