

Algunos problemas matemáticos de la física

Milton del Castillo Lesmes Acosta

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Proyecto Curricular de Matemáticas. Facultad de Ciencias y Educación

RESUMEN.

El tratamiento matemático de problemas propios de la física, conduce a la manipulación de objetos como es el caso de curvas sobre variedades, funciones definidas sobre variedades, soluciones de ecuaciones diferenciales sobre variedades, que a la vez se convierten en verdaderos problemas matemáticos.

Palabras claves: Variedades diferenciables, funciones definidas sobre variedades, curvatura, ecuaciones diferenciales, frecuencia de oscilación.

I. CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE.

Definición. Curvas suaves sobre variedades.

Si M es una variedad diferenciable, una función C^∞ , $\alpha : (a,b) \rightarrow M$ de un intervalo abierto de los reales hacia M se denomina curva suave sobre la variedad M .

La solución de las ecuaciones de Frenet-Serret para una curva $\vec{\alpha}$ en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \kappa \vec{y} \\ \vec{y}' &= -\kappa \vec{x} + \tau \vec{z} \\ \vec{z}' &= -\tau \vec{y}\end{aligned}$$

en donde \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} son los vectores tangente, normal y binormal respectivamente; κ , τ curvatura y torsión respectivamente, conducen a la ecuación diferencial $\vec{x}'''' + (\kappa^2 + \tau^2)\vec{x}'' = \vec{0}$ con solución para $\kappa = \tau = 1$

$$\vec{x}(t) = \vec{c}_1 \cos(\sqrt{2}t) + \vec{c}_2 \sin(\sqrt{2}t) + \vec{c}_3.$$

En la figura 1 se muestra una solución particular, $\vec{\alpha}(t) = \int \vec{x}(t) dt$ la curva denominada hélice, y las proyecciones en los tres planos coordenados correspondientes.

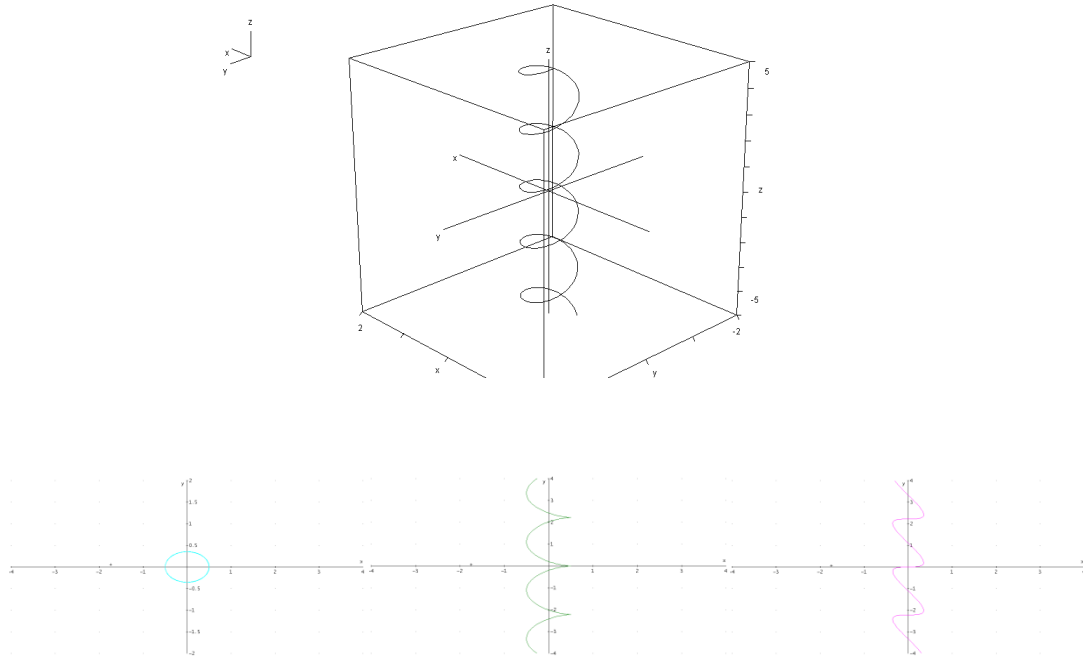


Figura 1

Nota: Es conveniente revisar el mismo problema en el plano, es decir

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \kappa \vec{y} \\ \vec{y}' &= -\kappa \vec{x} \end{aligned}$$

Con la condición $\kappa = 1$

Ahora consideremos el problema en \mathbb{R}^4 , con el fin de encontrar una curva solución del sistema

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= +\kappa_1 \vec{y} \\ \vec{y}' &= -\kappa_1 \vec{x} + \kappa_2 \vec{z} \\ \vec{z}' &= -\kappa_2 \vec{y} + \kappa_3 \vec{w} \\ \vec{w}' &= -\kappa_3 \vec{z} \end{aligned}$$

El sistema nos conduce a la ecuación

$$\vec{x}^{(4)} + (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \vec{x}'' + k_1^2 k_3^2 \vec{x} = \vec{0}$$

Que con la condición $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ se obtiene

$$\vec{x} = \vec{c}_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right) + \vec{c}_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right) + \vec{c}_3 \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right) + \vec{c}_4 \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right)$$

Se ha considerado para la evaluación de constantes: en $t=0$ se tiene $x = (1,0,0,0)$, $y = (0,1,0,0)$, $z = (0,0,1,0)$, $w = (0,0,0,1)$ lo que conduce a la curva

$$\vec{\alpha}(t) = \int \vec{x}(t) dt$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$$

entonces

$$\alpha_1(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right)$$

$$\alpha_2(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right)$$

$$\alpha_3(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right)$$

$$\alpha_4(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}t\right)$$

Es de notar que todas las proyecciones en \mathbb{R}^3 de esta curva son como se muestra en la Figura 2

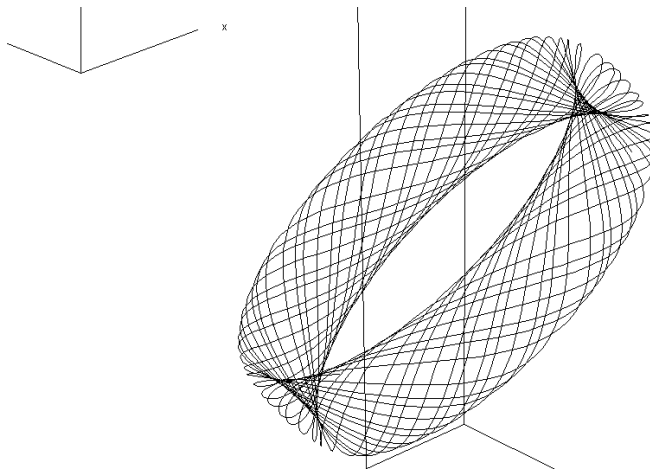


Figura 2

También es de notar que

$$\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t) + \alpha_4^2(t) = 1$$

Luego la curva está en la variedad conocida como S^3 . Esto explica la forma de las proyecciones en el espacio tridimensional. En \mathbb{R}^4 con ejes x_1, x_2, x_3, x_4 el número de proyecciones sobre el

espacio tridimensional son $\binom{4}{3} = 4$, mientras que en el espacio bidimensional se encuentran

$\binom{4}{2} = 6$. Efectuando una deformación como la mostrada para el caso del círculo hacia el

cuadrado en la Figura 3,

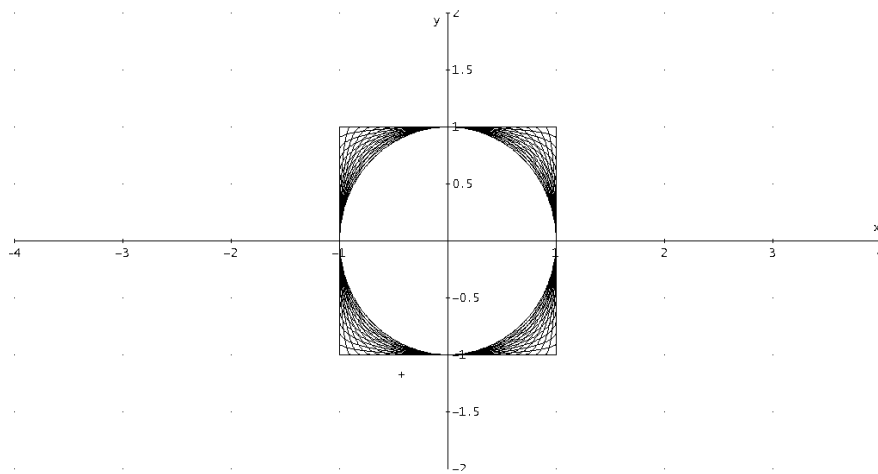


Figura 3

de S^3 se obtendría el hipercubo mostrado en la Figura 4, así se da una explicación consistente de la forma de las proyecciones de la curva considerada.

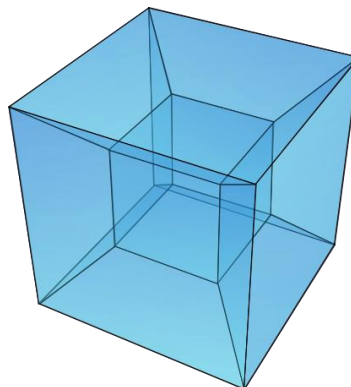


Figura 4

II. EXISTENCIA DE FUNCIONES C^∞ DEFINIDAS SOBRE VARIETADES.

Definición. Funciones suaves definidas sobre variedades.

Si M es una variedad diferenciable, U un subconjunto abierto de M . Se dice que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ sobre U , si $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ para cada función de coordenadas φ sobre M .

Para construir funciones C^∞ sobre variedades se requiere construir una función definida sobre la recta real, que es 1 en el intervalo $[-1,1]$ y 0 en el complemento del intervalo abierto $(-2,2)$.

Se iniciará con la función de la Figura 5 cuya definición es

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

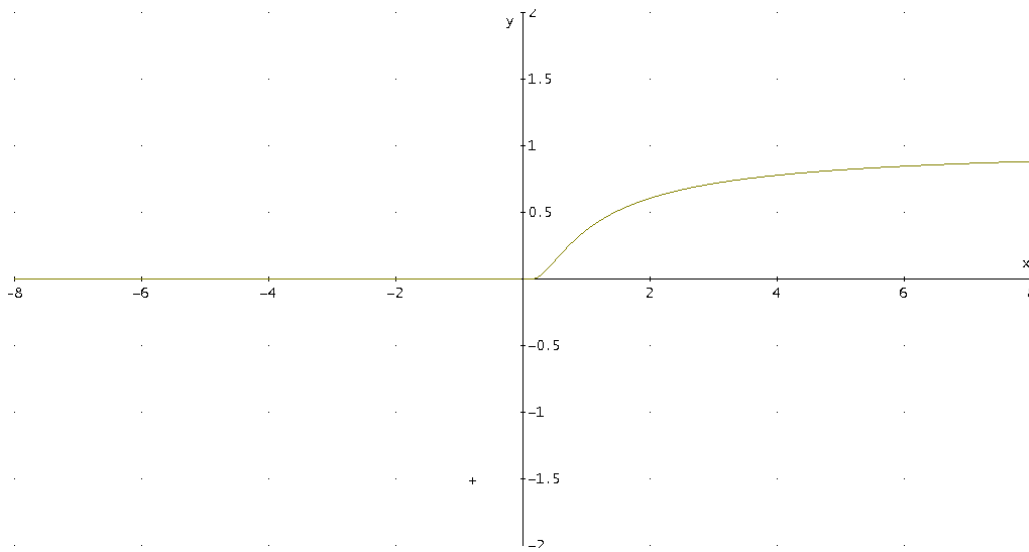


Figura 5

Luego se construye la función de la Figura 6 cuya ecuación es $g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$

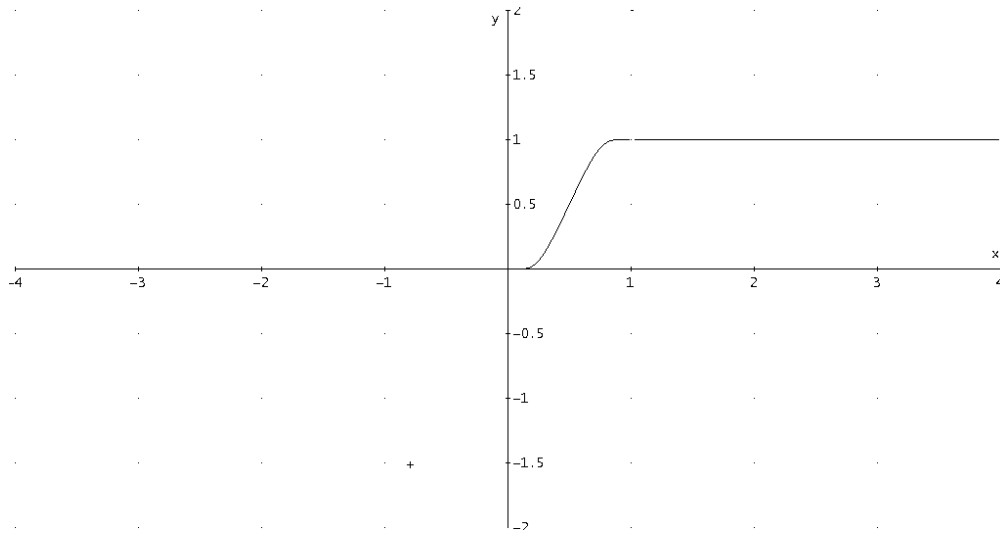


Figura 6

Finalmente la función $h(t) = g(t + 2)g(2 - t)$ de gráfica mostrada en la Figura 7, se puede utilizar en la construcción de funciones de varias variables requeridas de acuerdo a la dimensión de la variedad considerada.

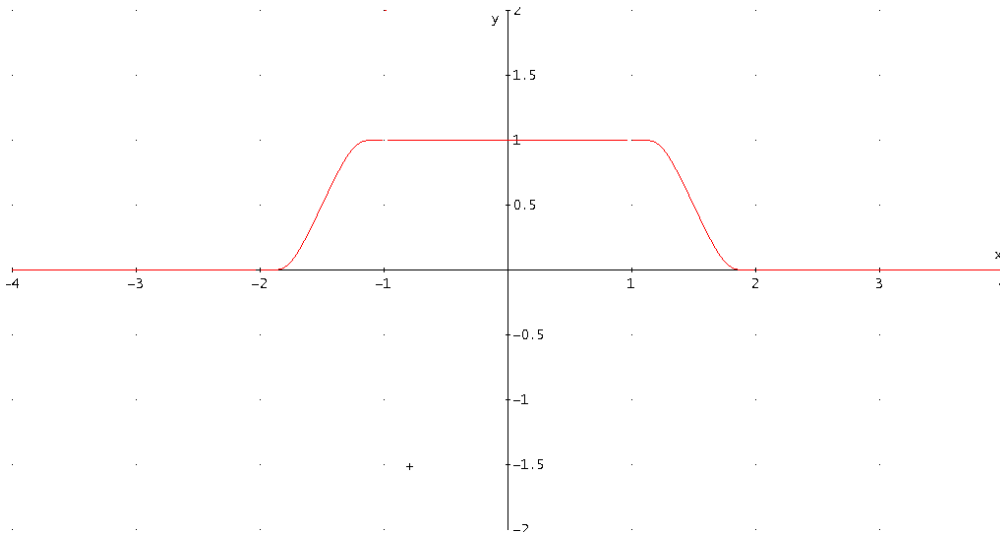


Figura 7

Por ejemplo la función $\phi(x, y) = h(x)h(y)$ en la Figura 8 satisface los requerimientos de construcción para variedades de dimensión dos.

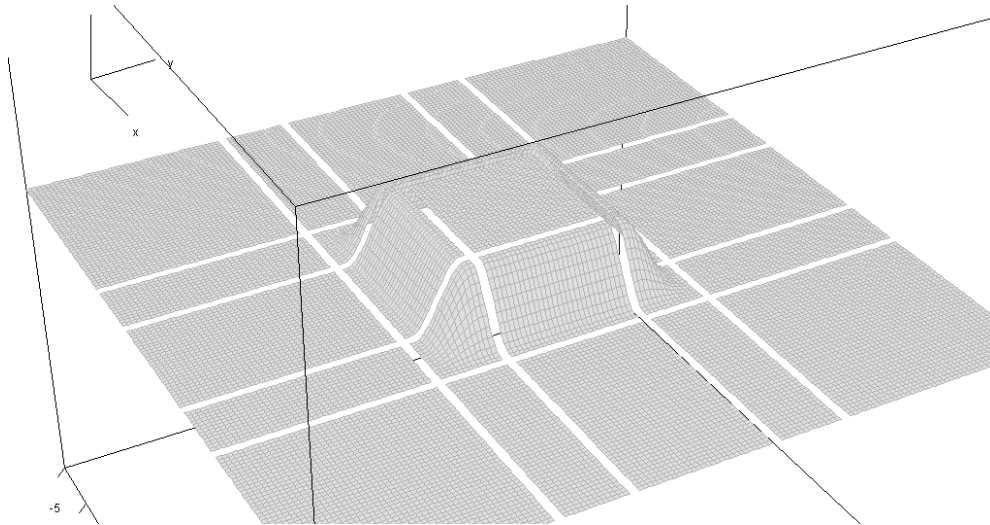


Figura 8

Curvas de nivel de esta superficie se presentan en la figura 9.

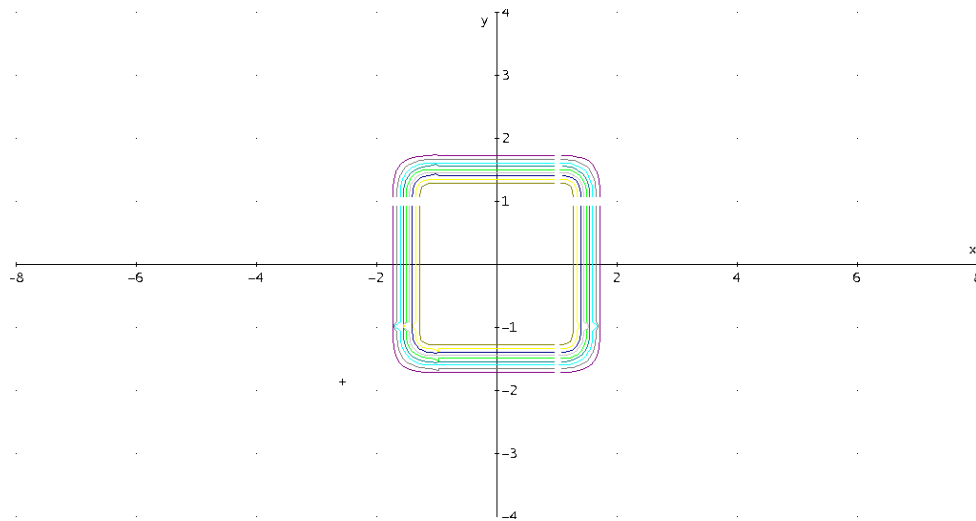


Figura 9

Nótese que los dominios cúbicos se pueden convertir en dominios esféricos mediante la consideración de $h(\sqrt{x^2 + y^2})$ como se muestra en la Figura 10.

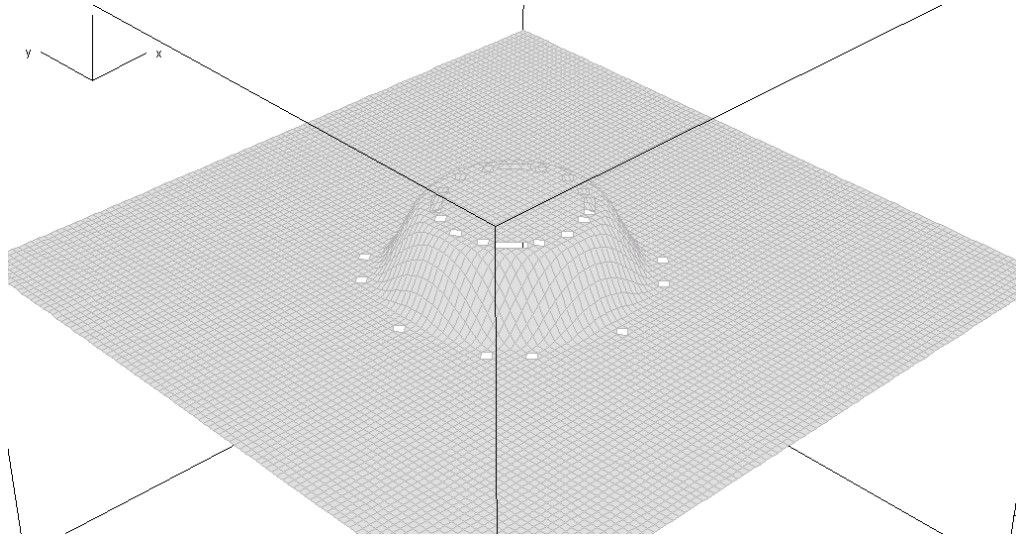


Figura 10

En la figura 11 se presentan algunas curvas de nivel de dicha superficie,

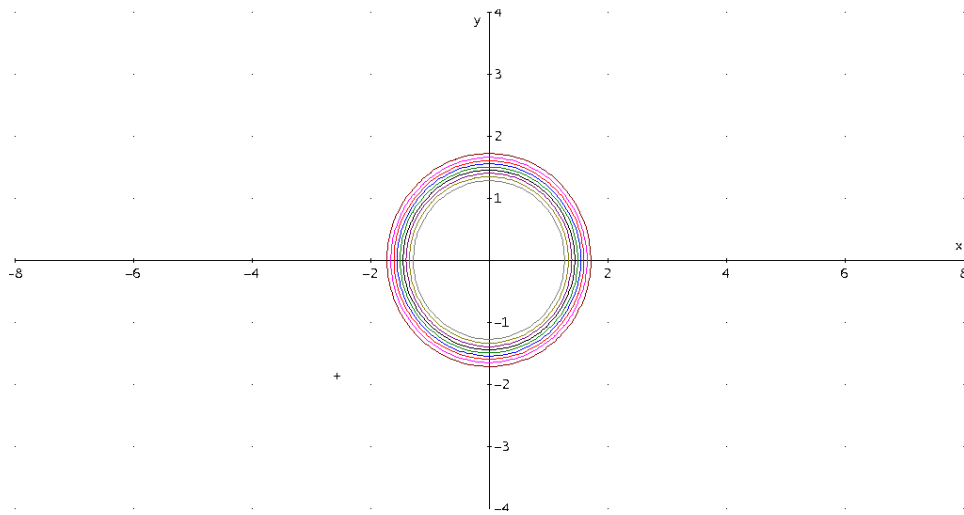


Figura 11

III. Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

En el diseño de circuitos eléctricos oscilantes, el problema del sostenimiento de una frecuencia de oscilación fue inicialmente estudiado y explicado por el físico van der Pol utilizando tubos de vacío. Generalmente la señal de corriente sigue ecuaciones diferenciales como

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

Se llega a una solución aproximada de la ecuación diferencial con el fin de conocer la corriente y contra la variación de corriente y' de la siguiente forma:

De la ecuación diferencial tomando $y' = \frac{dy}{dt} = z$, y , $y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dz}{dt}$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= \mu(1 - y^2)z - y\end{aligned}$$

Al sistema asociamos

$$\begin{aligned}\frac{y(t+h) - y(t)}{h} &\approx z(t) \\ \frac{z(t+h) - z(t)}{h} &\approx \mu(1 - y(t)^2)z(t) - y(t) \\ h &\approx 0\end{aligned}$$

En la tabla de la Figura 12 se muestra la implementación de las ecuaciones

$$\begin{aligned}y(t+h) &= z(t)h + y(t) \\ z(t+h) &= (\mu(1 - y(t)^2)z(t) - y(t))h + z(t) \\ h &= 0,1\end{aligned}$$

También se nota en la tabla de la Figura 12 que las condiciones iniciales no están en $y(0) = 0, z(0) = 0$, sino que se ha colocado el valor $y(0) = 0,1$, simulando un ruido muy pequeño que da inicio a una pequeña oscilación y que a la larga sitúa el oscilador en su oscilación sostenida.

Se ha utilizado $\mu = \frac{1}{16}$.

t	y	z			
0	0,1	0		h	0,1
0,1	0,1	-0,01		u	0,0625
0,2	0,099	-0,02006188			
0,3	0,09699381	-0,03008603			
0,4	0,09398521	-0,03997168			
0,5	0,08998804	-0,04961782			
0,6	0,08502626	-0,05892422			
0,7	0,07913384	-0,06779246			
0,8	0,07235459	-0,0761269			
0,9	0,0647419	-0,08383566			
1	0,05635833	-0,09083163			
1,1	0,04727517	-0,09703335			
1,2	0,03757184	-0,10236597			
1,3	0,02733524	-0,10676204			
1,4	0,01665904	-0,11016233			
1,5	0,0056428	-0,11251656			
1,6	-0,0056428	-0,11378404			

Figura 12

En el espacio de fases y versus z se efectúa el análisis del oscilador, Figura 13.

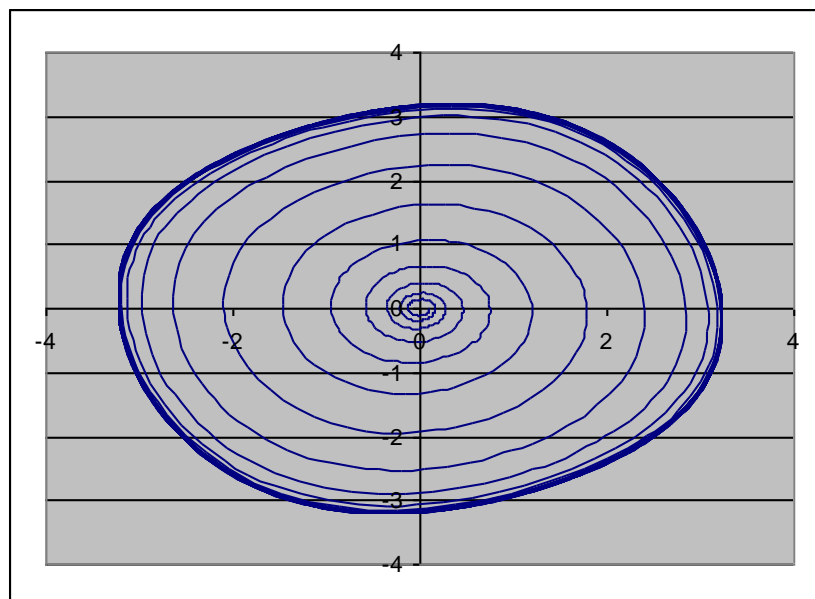


Figura 13

Finalmente la variación de la corriente en el tiempo, se presenta en la Figura 14

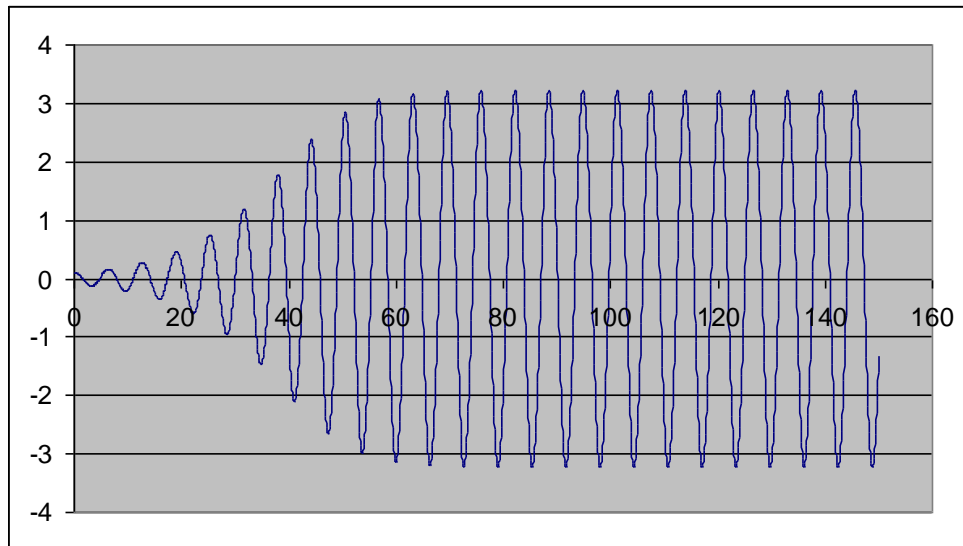


Figura 14

IV. CONCLUSIONES

1. Se delinea el procedimiento para el cálculo de curvas en dónde no es suficiente la consideración de únicamente dos funciones, como lo son las ecuaciones intrínsecas de las curvas en el espacio tridimensional, más exactamente su función curvatura y torsión, esto conlleva al estudio de propiedades y localización de curvas en espacios de dimensión >3 .
2. La implementación del cálculo diferencial e integral sobre variedades requiere de construcciones que aseguran la existencia de objetos definidos sobre variedades como las funciones suaves. Las funciones que presentan son utilizadas para mostrar la existencia de particiones de la unidad, herramienta indispensable en la construcción de objetos definidos localmente hacia objetos definidos globalmente o la descomposición de objetos globales en sumas de objetos locales; esto explica la construcción de funciones con soportes como los presentados aquí.
3. Se presenta una ecuación diferencial para la cual las complicaciones de su tratamiento analítico (expresión de su solución) conducen al estudio de métodos numéricos en muchos casos suficientes para ser aprovechados como herramientas para el análisis.

V. BIBLIOGRAFIA

- [1] K. Baker, *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Thompson, 2006
- [2] E. Haeussler, R. S. Paul, R. Wood, *Introductory Mathematical Analysis*, Pearson, Prentice Hall, 2005.
- [3] A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Dover Publications, Inc., 2007.
- [4] D. Maki, M. Thompson, *Mathematical Modeling and Computer Simulation*, Thompson, 2006.