TÍTULO:
LAS RELACIONES Y LAS DIFERENCIAS ENTRE LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL FINITA.

AUTOR: Dr. Reinaldo Hernández Camacho.

Profesor Titular de Matemática.

Doctor en Ciencias Pedagógicas.

CENTRO: Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Cuba.

EMAIL: reinaldo.hernández@umcc.cu

TELEFONO PARTICULAR: 283057

DIRECCIÓN PARTICULAR: Calle 115 entre 342 y 344. Edificio Micro A. Reparto Armando Mestre. Ciudad de Matanzas. Cuba.

CAMPO DE INVESTIGACIÓN: Resolución de problemas matemáticos.

NIVEL DE ENSEÑANZA: Universitaria.

RESUMEN.

En ocasiones resulta muy difícil, cuando estamos haciendo la modelación matemática de algún problema de la vida práctica, determinar si es necesario utilizar la integral definida o la integral finita para obtener la solución del problema.

En este trabajo presentamos un caso particular de esos tipos de problemas. Se hace el análisis del mismo y se presentan los resultados obtenidos utilizando en la modelación cada una de las dos operaciones matemáticas antes mencionadas, así como la solución real del problema, para establecer comparaciones.

INTRODUCCIÓN

Cuando modelamos matemáticamente algún fenómeno de la vida práctica, lo que hacemos siempre, es una idealización de la realidad objetiva. Existe determinado grado de subjetividad por parte de la persona que está realizando la modelación, cuando se ve ante la necesidad de tomar decisiones con respecto a las propiedades que debe asignarle a las variables que intervienen en el problema y a la propia solución del mismo.

No obstante la subjetividad que inevitablemente pueda estar presente en la modelación matemática de un problema, siempre debe existir una lógica, una razón, al menos intuitiva que justifique por qué se asume una u otra determinación, aunque finalmente, la solución matemática del problema sea dada en función de las propiedades que inicialmente se le asignaron a éste.

Así, por ejemplo, si queremos calcular el área total del planeta tierra, lo consideraremos idealmente como una esfera o como un elipsoide, para poder utilizar las propiedades y las fórmulas inherentes a estos conceptos matemáticos, y no tendremos en cuenta la inmensidad de lomas y depresiones que tiene la superficie terrestre.

DESARROLLO.

USO DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y DE LA INTEGRAL FINITA DEFINIDA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

No siempre resulta fácil diferenciar, (en particular para los estudiantes), cuando debe emplearse la integral definida o la integral finita definida en la modelación matemática de un problema.

Para obtener la solución S_f [a,a+n] de un problema que está relacionada con una función f en un intervalo [a,a+n], $a,n \in N$, hay ocasiones en que pueden existir dudas en cuanto a si la solución S_f [a,a+n] debe considerarse equivalente a $\int_a^{a+n} f(x)dx$ o a la $\sum_{x=a}^{a+n-1} f(x)$.

Veamos un ejemplo:

1) Una tira de esparadrapo está enrollada en un cilindro de plástico de 1,25 cm de radio exterior. Cada vez que se da una vuelta al cilindro con el esparadrapo, la longitud que se enrolla es aproximadamente equivalente a la de una circunferencia. Estas circunferencias van aumentando su radio. Si el espesor del esparadrapo es de 0,034 cm y el rollo tiene en

total 59 vueltas, y deseamos calcular la longitud total del rollo, ¿cuál sería la forma más adecuada para calcular esa longitud entre las dos posibilidades siguientes:?

a) L= $\int_1^{60} 2\pi(1,25+0,034x)dx$ o b) L= $\sum_{x=1}^{59} 2\pi(1,25+0,034x)$

Antes de dar una respuesta haremos algunos análisis.

LA INTEGRAL FINITA DEFINIDA. RELACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN CON LA INTEGRAL FINITA DEFINIDA Y CON LA INTEGRAL DEFINIDA.

Una expresión como $\sum_{x=1}^{59} 2\pi(1,25+0,034x)$ es una integral finita definida. Para calcular su valor se puede aplicar el teorema fundamental del Cálculo de una suma. Este consiste en determinar una función F(x), tal que su diferencia finita $\triangle$F(x) cumpla la siguiente relación: $\triangle$F(x)=2 π (1,25+0,034x). Una función que cumple esta característica es F(x)=2 π (0,017x^2+1,233x).

Entonces $\sum_{x=1}^{59} 2\pi(1,25+0,034x)$ = F(60) - F(1) = 841,95

Un procedimiento muy similar se utiliza para calcular el valor de la integral definida $\int_1^{60} 2\pi(1,25+0,034x)dx$, aplicando el teorema fundamental del Cálculo. Se debe encontrar una función F(x) tal que su derivada F´(x) cumpla la relación F´(x) = 2 π (1,25+0,034x). Una función que cumple esa condición es F(x)=2 π (0,017x^2+1,25x). Entonces $\int_1^{60} 2\pi(1,25+0,034x)dx$ =F(60)-F(1)=848,23.

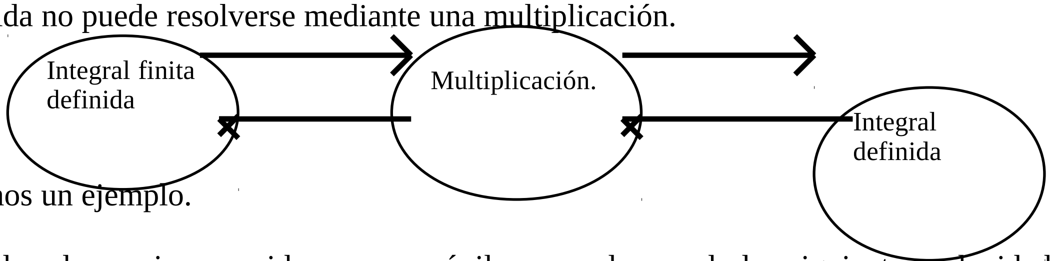
No es mucha la diferencia que existe entre uno y otro valor. Pero la pregunta que debemos hacernos es, ¿Y cuál de esos dos valores estará más cercano al valor real de la longitud del rollo?

Antes de dar respuesta a esta pregunta, vamos a realizar un pequeño análisis, en cuanto a la relación existente entre la multiplicación con la integral finita definida y con la integral definida. El esclarecimiento de estos tipos de relaciones es importante para ayudarnos a interpretar y modelar el problema matemáticamente; porque como plantean muchos estudiosos de los procesos cognoscitivos, la potencialidad para la aplicación de un concepto u operación Matemática, está estrechamente vinculado con el reconocimiento de las relaciones existentes entre esa operación o concepto y todos los demás que estén relacionados con ellos. Esto se explica teóricamente con las llamadas redes semánticas.

V. Font expresa lo siguiente al respecto: ¨ Las redes semánticas son representaciones hipotéticas de nuestras estructuras de conocimiento que permiten explicar las reglas de uso de los conceptos y las relaciones entre ellas. Por eso son útiles para estudiar a la vez los procedimientos y sus principios subyacentes. Los nódulos y las relaciones son las partes fundamentales de la red, la cual puede contener muchas afirmaciones, cada una de ellas en la forma nódulo-relación-nódulo. [...]. Desde esta perspectiva, el objetivo que debe perseguir la enseñanza de nuevos contenidos del curriculum debe ser conseguir que los nuevos contenidos no queden aislados, sino que se integren en un conocimiento bien estructurado del tema y en conexión con los otros conocimientos de los alumnos. [...]. Las actuaciones de los alumnos deben valorarse, básicamente, a partir de tres criterios: 1) el

grado de integración interna, 2) el grado de conexión que el nuevo conocimiento guarda con otros que ya sepa el alumno y 3) la correspondencia entre la manera que tiene el alumno de estructurar el conocimiento y la que el profesor tiene y le ha querido enseñar. [...]. Por tanto, para valorar la conexión con los otros conocimientos matemáticos y generales es conveniente proponer situaciones problémicas nuevas, en las cuales se tengan que utilizar conjuntamente las operaciones [...] Los nuevos contenidos aprendidos se almacenan en la memoria, mediante su incorporación a uno o varios esquemas. [...] no tiene sentido entonces considerar los conceptos aisladamente, sino que los hemos de considerar integrados en esquemas, los cuales se conciben como paquetes de información que incluyen no sólo los conceptos sino también sus procedimientos de utilización ¨(Font 1996)
La integral finita es una suma, y está relacionada con la multiplicación por el hecho siguiente: Cuando todos los sumandos son iguales (cuando los sumandos son constantes), la integral finita definida puede calcularse mediante la multiplicación de esa constante por el número de sumandos. Pero si los sumandos no son constantes, la integral finita definida no puede calcularse mediante una multiplicación.

La integral definida está relacionada con la multiplicación por el hecho de que todo tipo de problema que se resuelve mediante una integral definida de la forma $\int_a^b f(x)dx$, cuando la función f es constante en todo el intervalo [a,b], tiene siempre como solución el producto de esa constante por la longitud del intervalo. Pero si la función no es constante, la integral definida no puede resolverse mediante una multiplicación.



Veamos un ejemplo.

Calcular el espacio recorrido por un móvil para cada una de las siguientes velocidades y tiempos:

a) La velocidad es constante de 50 km por horas durante 3 horas.
Soluciones:
I) S= $\sum_{x=1}^{3} 50$ = 150 km, porque en cada hora recorre una cantidad constante de 50 km.
II) S= 50.(3) = 150 km
III) S= $\int_0^3 50\,dt = 50t\Big]_0^3$ = 150 km

b) La velocidad fue de 50 km la primera hora, de 60 km. la segunda hora y de 70 km. la tercera hora.
I) S= 50+60+70 = 180 km.
II) No puede calcularse mediante una sola multiplicación.
III) No puede calcularse mediante una sola integral definida.

c) La velocidad está dada por V(t) = 9,8t para $t \in [0,3]$, donde t varía continuamente en el intervalo [0,3].

I) No puede resolverse mediante una suma.
II) No puede resolverse mediante una multiplicación.
III) S= $\int_0^3 9{,}8t\,dt = 4{,}9]_0^3$ =4,9.(9) = 44,1 km.

ALGUNAS REFLEXIONES IMPORTANTES

1) Los problemas cuyas soluciones se modelan mediante una integral finita definida de la forma S= $\sum_{x=a}^{a+n} f(x)$. (a,n $\in$ N, tienen las características siguientes:
a) Cuando f(x) es constante, S=(n+1).f(x)
b) La variable x solamente toma los valores enteros x=a, x=a+1, x=a+2, ..., x=a+n. Es decir, x cambia de valor de uno en uno, y permanece constante entre un número entero y otro.

2) Los problemas cuyas soluciones se modelan mediante una integral definida de la forma S= $\int_a^b f(x)dx$, tienen entre otras las siguientes propiedades:
a) Cuando f(x) es constante, S= f(x).(b-a).
b) La variable x toma todos los valores contenidos en el intervalo [a,b]. Más precisamente; la función f está definida y es seccionalmente continua en [a,b].

ANÁLISIS DE ESTAS PROPIEDADES EN EL PROBLEMA.

Como vemos, para que exista la posibilidad de aplicar tanto la integral definida, como la integral finita definida, en la solución de este problema, debe cumplirse que si la imagen f(x) de la función f, que representa la longitud de cada circunferencia, fuera constante, (f(x)=c), la solución se podría determinar mediante una multiplicación. Esto evidentemente se cumple, pues si la longitud de cada una de las circunferencias fuera constante, la longitud total del rollo sería equivalente al producto de esa constante por 59, que representa la cantidad total de vueltas, (en ese caso de circunferencias iguales). Se cumpliría igualmente que $\sum_{x=1}^{59} c$ = 59c y $\int_1^{60} c\,dx = cx]_1^{60}$ = 59c

Analicemos ahora las segundas propiedades. Se trata en este momento de determinar si la variable x, que en este problema representa la cantidad de vueltas, toma solamente los valores x=1,2,...,59, o si toma todos los valores comprendidos en el intervalo [1,60], (también se podía haber considerado el intervalo [0,59]). Si asumimos que x toma solamente los valores x=1,2,...,59, estamos considerando que el radio r=1,25+0,034x se mantiene constante en cada vuelta, y por tanto, cada vuelta es una circunferencia perfecta; por lo que la longitud total del rollo se calcularía mediante una integral finita definida, (como la suma de las longitudes de 59 circunferencias concéntricas).

Por otra parte, si x toma todos los valores comprendidos en el intervalo [1,60], entonces el radio r= 1,25+0,034x es continuamente variable en ese intervalo, y por tanto, cada vuelta es una espiral que va aumentando continuamente su radio; por lo que la longitud total del rollo se calcularía mediante una integral definida.

Entonces la decisión de cuál de las dos formas que se han planteado es la más adecuada para calcular la longitud del rollo, está en dependencia de si consideramos que la realidad objetiva que estamos modelando se asemeja más, idealmente, a una espiral o a un conjunto de circunferencias concéntricas. De todas maneras, aún cuando se elija la mejor de las dos formas, esa será sólo una idealización, y por tanto una aproximación de la realidad.

Otro aspecto a destacar en este sentido es que, hay ocasiones en que resulta evidente el concepto y las operaciones matemáticas que deben ser utilizadas en la modelación matemática de un fenómeno de la realidad; pero hay otras ocasiones en que no resulta así; sobre todo cuando el fenómeno u objeto real que se pretende modelar matemáticamente, no tiene una gran similitud evidente con conceptos y operaciones matemáticas específicas.

El problema que hemos estado analizando aquí tiene en cierta medida esas características. En realidad no puede considerarse que la longitud del radio se vaya incrementando continuamente y que el rollo tome la forma de una espiral, pues cuando se da la primera vuelta se describe una circunferencia perfecta. Se produce entonces un incremento del radio de 0,034 cm como consecuencia de que al comenzar la segunda vuelta hay que “saltar” el grueso de la tira de esparadrapo para describir una segunda circunferencia; y así sucesivamente hasta dar las 59 vueltas.

Esta forma de razonar nos da a entender que la longitud debe calcularse mediante una sumatoria. Sin embargo, no debemos engañarnos y pensar que realmente se forman 59 circunferencias perfectas; porque cada uno de estos “saltos” que se producen al finalizar cada vuelta completa, son en realidad unas especies de “lomitas” que se van alargando cada vez más y van siendo cada vez menos perceptibles, tomando cierta tendencia a convertirse en una espiral.

Veamos a continuación los resultados que se obtuvieron en un experimento realizado, en el cual se efectuó la medición de la longitud del radio y se calcularon la integral definida y la integral finita definida, con los datos del problema que se planteó anteriormente.

a) La longitud real obtenida mediante la medición del rollo fue: L= 847,5 cm

b) El valor de la integral finita definida fue: $\sum_{x=1}^{59} 2\pi(1{,}25 + 0{,}034\,x)$ = 841,95 cm

c) Y el valor de la integral definida fue: $\int_{1}^{60} 2\pi(1{,}25 + 0.034\;x)\,dx$ = 848,23 cm

d) Como dato adicional, tenemos que: $\int_{0}^{59} 2\pi(1{,}25 + 0.034\;x)\,dx$ = 835,66 cm

De estos resultados no se deben obtener conclusiones absolutas. Sería bueno que el experimento se repitiera en forma reiterada con otras situaciones reales parecidas. De todas formas no debe pasarse por alto las imprecisiones que inevitablemente se producen en las mediciones; y que pueden tener repercusiones sensibles en los resultados que se obtengan mediante los cálculos, como por ejemplo, la longitud variable de los radios.

CONCLUSIONES

En la modelación Matemática de fenómenos de la vida práctica, no siempre resulta evidente cuál o cuáles operaciones y conceptos matemáticos representan una mejor aproximación ideal al objeto o fenómeno real que se está modelando.

Cuanto más amplio y profundo sea el conocimiento que una persona tenga, de los nexos existentes entre los diferentes conceptos que ha logrado adquirir en el desarrollo de su vida, mayores posibilidades tendrá de aplicarlos en la modelación y solución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA.

-Font, V.: Esquemas cognitivos. Algunos ejemplos de su aplicación a las matemáticas. Revista SUMA: Sobre la Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. N0 22, Zaragoza, España. 1996.

-Hernández, R.: “Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto”. Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.

-Hernández, R.: “La aplicación de la integral doble y de la integral triple en la solución de problemas”. Evento: La Enseñanza de la Matemática y la Computación. (12-2004).

-Hernández, R.: “La Lógica en la vida cotidiana”. Evento: MATECOMPU 2005, (12-05).

-Hernández, R.: La derivada como una extensión necesaria de la división. Memorias del COMAT-2007.

-Hernández, R.: Técnicas para la resolución de problemas. Monografías/2007. CD- ROM. ISBN: 959- 16-0490-4.

-Hernández, R.: La Heurística en el razonamiento universal. (2007). Revista Atenas. ISSN-1682-2749.

-Hernández, R.: Propuesta didáctica para identificar cuándo la Integral Definida es aplicable para resolver un problema. Revista INIE. Actualidades Investigativas en Educación. 2007. Costa Rica. La revista está indexada en los directorios: LATINDEX, REDALYC, IRESIE, CLASE, DIALNET, DOAJ, E-REVIST@S.

-Hernández, R.: Cuándo se puede aplicar la Integral definida para resolver un problema. Congreso Internacional de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas. ALAMMI 2007. México.

-Hernández, R.: “Aplicación de la integral doble”. CD-ROM, código: ISBN 978-959-16-0632-7, 2-2008.

-Hernández, R.: “Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida”. Revista Aula Universitaria N 9. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina. 2008.

-Llivina, M.J.: “Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos”. Tesis de doctorado. La Habana. 1999.