FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS

CON APLICACION EN LA COMPOSICON DE FUNCIONES.

JORGE ALFONSO HERNÁNDEZ
Profesor Titular de Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de El Salvador
Avenida Santiago y Calle Los Molinas, No. 57-A, Colonia Vilanova, San Ramón, Mejicanos, San Salvador, El Salvador, Centro América.
Teléfonos: Casa (503) 2252-5735
Móvil (503) 7887-4697
Correo electrónico: joralfher@hotmail.com
joralfher@yahoo.com.mx
joralfher@gmail.com

1. FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN Q.

Cuando se estudia el álgebra elemental se tiene como uno de sus contenidos "La factorización de polinomios", en la cual se plantean algunos "casos de factoreo" o fórmulas que indican como, dado un polinomio que tiene una forma específica puede expresarse como el producto de dos o más factores diferentes de uno, en esta ocasión se mencionan los siguientes:

La diferencia de dos Cuadrados : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

La diferencia de dos Cubos : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La suma de dos cubos : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Pero, ¿qué hay de *la suma de dos cuadrados*?; es decir:

$$a^2 + b^2 = ?$$

Muy poco o nada se dice al respecto, en los libros de álgebra elemental se afirma que no se puede factorizar sin que se obtenga factores irracionales, ya que $a^2 + b^2$ es primo; esto es, que solo es divisible por el mismo y uno, tales afirmaciones pueden llevar a pensar que todas las sumas de dos cuadrados no se pueden factorizar, en el Es por esta razón que se escribe lo siguiente:

TEOREMA 1.1: ***Sea la suma de dos cuadrados*** a^2+b^2 ***donde*** $a,b \in Q$ ***y sea*** $c=\sqrt{2ab}$ ***, si c es una expresión racional; es decir,*** $c=\sqrt{2ab}$ ***es una "raíz exacta" entonces*** a^2+b^2 ***se puede factorizar como*** $a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$.

DEMOSTRACION:

$a^2+b^2=a^2+2ab-2ab+b^2$ ya que $2ab-2ab=0$

$=a^2+ab+ab+b^2-2ab$ ya que $ab+ab=2ab$ y ley conmutativa de la suma

$=a^2+ab+ab+b^2-c^2$ ya que por hipótesis $c=\sqrt{2ab}$

$=(a^2+ab)+(ab+b^2)-c^2$ ley asociativa de la suma

$=a(a+b)+b(a+b)-c^2$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b)(a+b)-c^2$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b)(a+b)-(a+b)c+(a+b)c-c^2$ ya que $(a+b)c-(a+b)c=0$

$=[(a+b)(a+b)-(a+b)c]+[(a+b)c-c^2]$ ley asociativa de la suma

$=(a+b)[a+b-c]+c[a+b-c]$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b+c)[a+b-c]$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+c+b)(a-c+b)$ Ley conmutativa de la suma.

Así tenemos que:

Si $c=\sqrt{2ab}\in Q \implies a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$

Ejemplo 1.1 Factorizar $4x^4+81$.

Solución

Tenemos que:

$$4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2$$

Entonces surge la pregunta:

¿Se podrá factorizar aplicando el teorema 1.1?

Con el propósito de obtener una respuesta tomamos:

$$a = 2x^2$$

$$b = 9 \quad y$$

$$c = \sqrt{2ab} = \sqrt{2(2x^2)(9)} = \sqrt{36x^2} = 6x$$

De este modo tenemos que "c" es una “raíz exacta” quiere decir que si se puede factorizar aplicando el teorema 1.1.

Así, sustituyendo:

$$a = 2x^2 \text{ , } b = 9 \quad y \quad c = 6x \quad \text{en}$$

$$a^2 + b^2 = (a + c + b)(a - c + b)$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\boxed{4x^4 + 81 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)}$$

2. APLICANDO LA FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN LA COMPOSICION DE FUNCIONES.

Ejemplo 2.1

Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^4 + 64}{x^2 + 4x + 8}$ y $f(x) = \dfrac{x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2}$ verificar que $(f \circ g)(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$.

Solución

Se tienen las funciones

$$f(x) = \frac{x^4 + 64}{x^2 + 4x + 8} = \frac{(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)}{x^2 + 4x + 8} = x^2 - 4x + 8 \quad \text{y}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 2$$

Así :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 8$$

$$(f \circ g)(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4$$

Bibliografia.

*MATEMATICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA (pág. 19)
Segunda Edición
S. T. Tan
Editorial MATH.

*ÁLGEBRA (pág. 157)
Aurelio Baldor
Editorial Publicaciones CULTURAL

*ÁLGEBRA (pág. 52)
Paul K. Rees, Fred W Sparks y Charles Sparks Rees
Décima Edición
Editorial Mc. Graw Hill.

*En mi país, El Salvador, se estudia el álgebra básica haciendo énfasis en la factorización y operaciones con fracciones, pero, sobre la factorización de la suma de dos cuadrados, casi nada se dice y, en algunos casos, me parece que facilita algunas operaciones, otros, prefieren la división de polinomios.
La fórmula que se presenta para la factorización tiene supuestos bajo los cuales es verdadera, habrá otros en cuales no lo es. En cuanto a la fórmula y los ejemplos en la composición de funciones, no escribo bibliografía; ya que, son de mi creación. Tengo más ejemplos en el cálculo diferencial, integral, valores extremos, en fin que se puede utilizar en varias áreas de la matemática.