UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

NÚCLEOS APROXIMADAMENTE TOEPLITZ

Autor: Arnaldo de la Barrera Correa

1. Resumen

En este trabajo se define un nuevo tipo de núcleo denominado, núcleo aproximadamente Toeplitz, de manera muy similar a como se define una base de Riesz. Se prueba que todo núcleo de Toeplitz es aproximadamente Toeplitz, además se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dos núcleos aproximadamente Toeplitz resultan ser equivalentes.

Por otra parte dado un núcleo Toeplitz y cierta perturbación (ruido), se muestra bajo qué condiciones podemos modelar a partir de éste un núcleo aproximadamente Toeplitz, y recíprocamente dado un núcleo aproximadamente Toeplitz bajo que condiciones este puede modelar un núcleo Toeplitz.

Finalmente, como un caso particular de un núcleo aproximadamente Toeplitz, se obtienen los resultados de Strandell que caracterizan los procesos estocásticos aproximadamente estacionarios.

2. Introducción

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, se dice que K es un *núcleo de Toeplitz* cuando

$$K(m+1, n+1) = K(m, n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Como ejemplo de núcleo de Toeplitz definido positivo tenemos los núcleos de autocorrelación (covarianza) de procesos estocásticos estacionarios discretos (sobre espacios de Hilbert) donde la variable aleatoria viene dada por la función $X : \mathbb{Z} \to H$, con H espacio de Hilbert y núcleo de autocorrelación

$$K(m, n) = \langle X(m), X(n) \rangle$$

Se pueden probar las siguientes afirmaciones :

Un núcleo K es de Toeplitz si y sólo si

$$K(n, m) = K(n - m, 0)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Un núcleo K es de Toeplitz si y sólo si existe una sucesión $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$K(n, m) = \tau(n - m).$$

En este trabajo se pretende definir y caracterizar los núcleos que hemos denominado aproximadamente Toeplitz. Para hacer esto se usarán las bases de Riesz, en forma similar a como las presenta Young en su libro [**16**]. Estos núcleos serán utilizados para obtener los resultados de Strandell (ver [**15**]) referentes a los procesos estocásticos aproximadamente estacionarios.

El trabajo se encuentra dividido en tres partes. En la primera parte se aborda el estudio de las bases de Riesz y las sucesiones de Bessel. La segunda parte está dedicada al estudio de los núcleos Toeplitz y se introducen los núcleos aproximadamente Toeplitz. Finalmente se obtienen los resultados concernientes a los procesos estocásticos aproximadamente estacionarios, como caso particular de los núcleos aproximadamente Toeplitz.

Cabe anotar que el soporte teórico fundamental del estudio se encuentra estrechamente relacionado con la noción de bases equivalentes introducidas por Carotheres en [**2**], las cuales describimos brevemente a continuación.

3. Núcleos Aproximadamente Toeplitz

Dados dos espacios de Banach X, Y con sucesiones básicas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si existe una constante c, $0 < c < \infty$

tal que

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y$$

para toda sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de escalares.

Esto es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si y sólo si la aplicación $\psi(x_i) = y_i$ se extiende a un isomorfismo entre $span\{x_n\}$ y $span\{y_n\}$.

Se puede pensar en la misma dirección, pero en lugar de considerar espacios de Banach, considerar espacios de Hilbert H de dimensión infinita y separables. En este contexto se definen las bases de Riesz

de la siguiente manera.

Definición 0.1. Sea H espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq H$ se llama base de Riesz para H si

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H, o equivalentemente, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en H, es decir, para todo $h \in H$ y para todo $\varepsilon > 0$, existen $c_1, c_2, ...c_s \in \mathbb{C}$ y $n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left\|h - \sum_{i=1}^{s} c_i x_{n_i}\right\| < \varepsilon.$$

b) Existen constantes $A, B > 0$, $A \leq B$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|^2,$$

para toda $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Se puede probar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz para H, si y sólo si existe un operador lineal acotado e invertible $\psi : H \to H$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ para H tal que

$$\psi(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es equivalente a una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ para H.

Utilizando la idea base de Riesz, se puede definir un nuevo tipo de núcleo al que se denominará aproximadamente Toeplitz.

Consideremos un espacio de funciones H que es un espacio de Hilbert, separable y dotado del producto interior $\langle .,. \rangle$. Sea $(f_n)_n \subset H$, podemos definir el espacio de Hilbert generado por esta sucesión de la siguiente manera

$$H\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \overline{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Es claro que $H\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$

Además sean $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es un núcleo y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ es una sucesión tal que

$$K(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle.$$

Se define el espacio de Hilbert generado por el núcleo K de la siguiente manera

$$H_K := \overline{span}\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En este caso se dice que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K.

Sea $r \in \mathbb{N}$ ó $r = \infty$ definamos el siguiente conjunto de funciones

$$\mathbf{K}(r) = \left\{ \begin{array}{l} \tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}/ \text{ existe } \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H, \langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m)\} \\ \text{y } \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es total en un subespacio de dimension } r \text{ de } H. \end{array} \right\}.$$

Definición 0.2. Un núcleo $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se llama aproximadamente Toeplitz si existe $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, Toeplitz, $\tau \in \mathbf{K}(\dim H_K)$ y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l) \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K(j,l) \leq B \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

Se introduce la equivalencia entre dos núcleos de manera análoga a como se establece la equivalencia entre una base de Riesz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$, esto es, sean $t : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ núcleos y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en H con

$$H_t = \overline{span}\,\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad H_K = \overline{span}\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

y además

$$t(n,m) = \langle f_n, f_m \rangle_t, \qquad K(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle_K.$$

Se dice que t y K son equivalentes si se cumple

a) $H_K = H_t = H_0$.

b) Existe un operador lineal acotado e invertible $\psi : H_0 \to H_0$ tal que

$$\psi(f_n) = g_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En este trabajo se probará que $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es aproximadamente Toeplitz si y sólo si existe $t : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Toeplitz tal que K y t son equivalentes.

Por otra parte se establecen condiciones suficientes y necesarias, bajo las cuales un núcleo aproximadamente Toeplitz puede ser utilizado para modelar uno Toeplitz y recíprocamente.

Las ideas anteriores nos permiten caracterizar y generalizar un nuevo tipo de proceso estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $L^2(P)$ denominado proceso estocástico aproximadamente estacionario, el cual juega un rol importante en el estudio teórico y en las aplicaciones de los procesos estocásticos débilmente estacionarios.

Bibliografía

[1] C. Berg, J. P. Christensen, P Ressel, Harmonic Analysis on semigroups, springer - Verlag, New York, 1984. Citado en página(s)

[2] N. L. Carotheres, A Short course on Banach Space Theory, Department of Mathematics and statics, Bowling Green state University, Summer, 2000. Citado en página(s) 2

[3] M. Cotlar, A. Maestripieri, Representaciones de Fourier, Factorizaciones Triangulares y operadores diferenciales canónicos, Universidad Central de Venezuela, 2004. Citado en página(s)

[4] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels.* Proc. Symp. Pure Math. AMS., **35-I**, (1979), pp. 383–407.

[5] L. Debnath, P. Mikusinski, Hilbert spaces with a applications, Third Edition, Academic Press, 2000. Citado en página(s)

[6] R. Douglas, Banach álgebra techniques in operator theory. Academic press, 1972. Citado en página(s)

[7] H. Dym, H. P. Mc Kean, Fourier series and integrals, Academic Press, 1972. Citado en página(s)

[8] S. Hanai, On Biorthogonal system in Banach spaces, Nagaoka Technical College, Comm. by S. Kakeya, M.I.A., oct. 12 1944, vol. 20.Citado en página(s)

[9] I. A. Ibragimov, Y. A. Rozanov, Gaussian Processes, Applications of Mathematics 9, Springer Verlag 1978.

[10] A. G. Miamee, M. Pourahmadi, Degenerate multivariate stationary processes: Basicity, past and future, and autoregressive representation, Sankhya, Ser. A 49, No. 3, 316-334, 1987. Citado en página(s)

[11] B. Sz. Nagy, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970. Citado en página(s)

[12] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, 1962. Citado en página(s)

[13] C. Sadosky, Lifting of Kernels shift-invariont in scattering systems, Holormorphic space, MSRI publications, volume 33, 1998. Citado en página(s)

[14] Z. Sasvári, Positive definite and definitizable functions, Akademie Verlag, 1994. Citado en página(s)

[15] G. Strandell, Stationary in Hilbert spaces, U.U.D.M. Report 2001:31, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2001. Citado en página(s) 2

[16] R. M. Young, An introduction to Nonharmonic Fourier, Academic Press, New York, 1980. Citado en página(s) 2