TRIGONOMETRÍA DEL CUADRADO Y COORDENADAS POLARES: "Estudio de la trigonometría definida desde un cuadrado y gráficas polares a partir de esta"

Camilo A. Ramírez*. Ángela Salgado.**
Laura C. Garcia. Laura Vargas**. Lina Zúñiga**.**

** Docente Instituto Pedagógico Nacional.*
Estudiante Matemática Aplicada. Universidad Nacional de Colombia.
Bogotá, Colombia.
(kamandramsan@gmail.com)
*** Estudiantes Instituto Pedagógico Nacional. Bogotá, Colombia.*

Resumen: Los estudiantes de grado once del Instituto Pedagógico Nacional presentan un estudio alternativo de la trigonometría al definir las funciones trigonométricas a partir de un cuadrado y no de un círculo unitario. En una primera parte se presentarán tablas y gráficas de las nuevas funciones y se verán algunas similitudes, ventajas y desventajas del trabajo con respecto a la trigonometría clásica. Una segunda parte presentará el manejo de gráficas en coordenadas polares basándose en la trigonometría del cuadrado contribuyendo a enriquecer su estudio en la enseñanza secundaria.

Palabras Clave: Trigonometría, Cuadrado, Funciones, Gráficas, Polares, Enseñanza

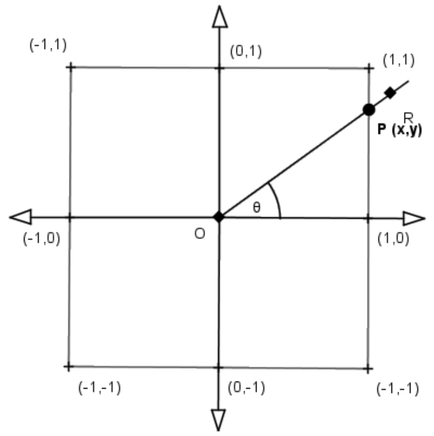
INTRODUCCIÓN

"La trigonometría es una de las ramas más versátiles de las matemáticas. Desde su invención en el viejo mundo ha sido importante tanto en aplicaciones teóricas cómo practicas..." [1]. Usualmente en las aulas de clase se presenta la trigonometría basada en un circulo unitario y con éste se definen las funciones trigonométricas que son distintas a las polinómicas o racionales y tienen características especiales (periodo, máximos y mínimos infinitos, etc.). Este trabajo mostrará que el círculo no es el único sistema que se puede utilizar para desarrollar una trigonometría y se basará en un cuadrado de lados una unidad definiendo diferentes funciones mediante las relaciones existentes entre sus lados (análogo a como se definen las funciones en el círculo) se estudiarán algunos puntos notables para poder describir las gráficas de las nuevas funciones descubriendo características y similitudes con las funciones trigonométricas clásicas. Así, se abre un extenso camino por explorar, se pueden estudiar transformaciones de las nuevas funciones, identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas y aplicaciones de la nueva trigonometría, entre otros.

En una segunda parte se traslada la trigonometría del cuadrado al sistema de coordenadas polares y se comienza a estudiar las nuevas gráficas que se producen y las similitudes que éstas tienen con las resultantes de la trigonometría clásica. Se deja un espacio abierto en la enseñanza de estos dos temas para que el interesado explore y construya sistemas trigonométricos cambiando la base de su definición.

Cabe resaltar que se utiliza el programa *Regla y Compás* para realizar las construcciones de las gráficas de las funciones trigonométricas y polares en ambas trigonometrías, lo cual permite evidenciar propiedades de manera dinámica.

1. TRIGONOMETRIA DEL CUADRADO



En la nueva trigonometría se considera un cuadrado con centro en el origen cartesiano y lados paralelos a los ejes de 2 unidades cada uno. Un rayo $\overrightarrow{OR}$ se dibuja de manera análoga a la trigonometría circular y el punto $P(x,y)$ es la intersección de $\overrightarrow{OR}$ con los lados del cuadrado. El ángulo θ se define con el eje positivo de x como el rayo inicial, el origen *O* como vértice y $\overrightarrow{OR}$ como rayo final.

1.1 PUNTOS TERMINALES

Para algunos ángulos notables se pueden hallar los puntos terminales $P(x,y)$ viendo la gráfica del cuadrado unitario. Suponga que θ es un ángulo positivo que varía a razón de $\frac{\pi}{4}$ radianes, en la figura 2 se evidencia el punto determinado por cada ángulo, con lo cual se puede completar la tabla 1.

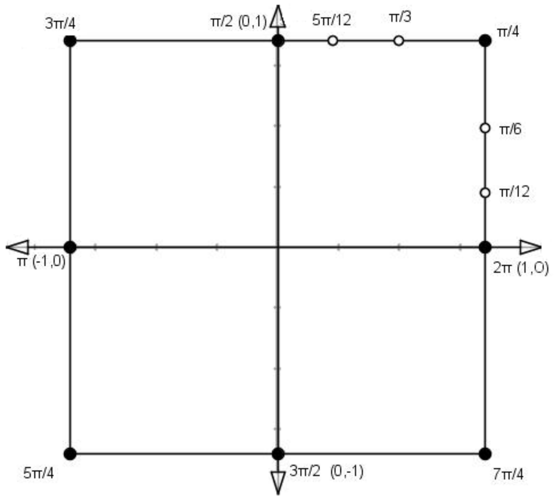


Fig 2. Cuadrado unitario en el cual se describen algunos ángulos notables y puntos terminales

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$P(x,y)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$

Tabla 1. Puntos terminales.

A continuación se mostrará como se halla algebraicamente el punto terminal de $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{\pi}{6}$.

- Punto terminal de $\frac{\pi}{12}$.

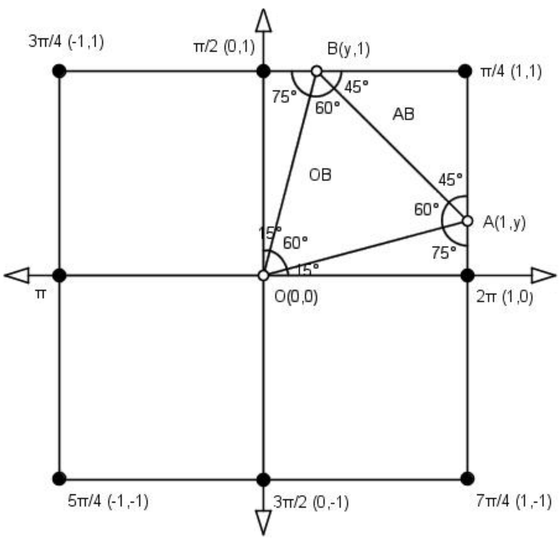


Fig. 3. Construcción para hallar el punto terminal

Se construye el ΔOAB con $O(0,0)$, $A(1,y)$ y $B(y,1)$ (fig. 3), es fácil demostrar que las medidas de los ángulos son iguales, es decir, $m\angle A = m\angle B = m\angle O = 60^o$ entonces ΔOAB es equilátero y por consiguiente $AB = OB$. Se tiene que:

$$AB = \sqrt{y^2+1} \text{ y } OB = \sqrt{(y-1)^2 + (1-y)^2}$$

Igualando las distancias se puede despejar *y* de la siguiente forma

$$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{(y-1)^2 + (1-y)^2}$$
$$y^2 + 1 = 2y^2 - 4y + 2$$
$$y^2 - 4y + 1 = 0$$
$$y_1 = 2+\sqrt{3} \quad , \quad y_2 = 2-\sqrt{3}$$

Como $-2 \le y \le 2$ se descarta la solución y_1 y se tiene que el punto terminal para $\frac{\pi}{12}$ es $A\left(1, 2-\sqrt{3}\right)$.

- Punto terminal de $\frac{\pi}{6}$.

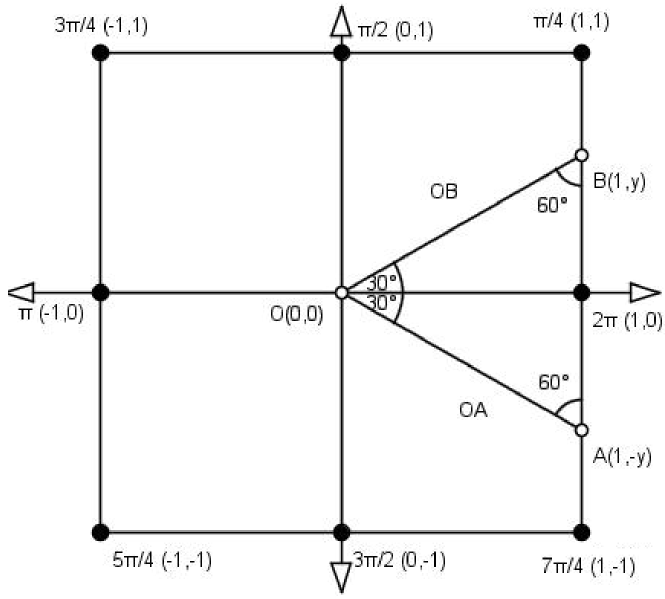


Fig. 4. Construcción para hallar el punto terminal

Se construye el ΔOAB con $O(0,0)$, $A(-1,y)$ y $B(1,y)$ (fig. 4), es fácil demostrar que las medidas de los ángulos son iguales, es decir $m\angle A = m\angle B = m\angle O = 60^o$ entonces ΔOAB es equilátero y por consiguiente $OA = OB$. Se tiene que:

$$OB = 2y \text{ y } OA = \sqrt{y^2+1}$$

Igualando las distancias se puede despejar y de la siguiente forma

$$2y = \sqrt{y^2 + 1}$$
$$4y^2 = y^2 + 1$$
$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se tiene que el punto terminal para $\frac{\pi}{6}$ es $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Con los anteriores resultados y teniendo en cuenta la simetría del cuadrado se pueden hallar los puntos terminales de diferentes ángulos; a continuación se presenta una tabla en donde se relacionan todos los puntos terminales cuando θ varía en razón de $\pi/12$ radianes

θ	$P(x,y)$	θ	$P(x,y)$
0	$(1,0)$	π	$(-1,0)$
$\pi/12$	$(1, 2-\sqrt{3})$	$13\pi/12$	$(-1, -2+\sqrt{3})$
$\pi/6$	$\left(1, \sqrt{3}/3\right)$	$7\pi/6$	$\left(-1, -\sqrt{3}/3\right)$
$\pi/4$	$(1,1)$	$5\pi/4$	$(-1,-1)$
$\pi/3$	$\left(\sqrt{3}/3, 1\right)$	$4\pi/3$	$\left(-\sqrt{3}/3, -1\right)$
$5\pi/12$	$(2-\sqrt{3}, -1)$	$17\pi/12$	$(-2+\sqrt{3}, -1)$
$\pi/2$	$(0,1)$	$3\pi/2$	$(0,-1)$
$7\pi/12$	$(-2+\sqrt{3}, -1)$	$19\pi/12$	$(2-\sqrt{3}, -1)$
$2\pi/3$	$\left(-\sqrt{3}/3, 1\right)$	$5\pi/3$	$\left(\sqrt{3}/3, -1\right)$
$3\pi/4$	$(-1,1)$	$7\pi/4$	$(1,-1)$
$5\pi/6$	$\left(-1, \sqrt{3}/3\right)$	$11\pi/6$	$\left(1, -\sqrt{3}/3\right)$
$11\pi/12$	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$23\pi/12$	$(1, -2+\sqrt{3})$
π	$(-1,0)$	2π	$(1,0)$

Tabla 2. Puntos terminales de ángulos notables

1.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS[1]

Definimos las funciones trigonométricas relacionando las coordenadas de $P(x,y)$ de la siguiente manera:

a) $\mathrm{Csin}\,\theta = x + y$ b) $\mathrm{Ccos}\,\theta = x - y$

c) $\mathrm{Ctan}\,\theta = (\mathrm{Csin}\,\theta)(\mathrm{Ccos}\,\theta) = x^2 - y^2$

[1] Para diferenciar las nuevas funciones trigonométricas de las usadas normalmente se antepone la letra "C", quedando las funciones Csin, Ccos y Ctan. La definición de Csin es la suma de las coordenadas del punto, la de Ccos es la resta de las coordenadas y la de Ctan es la multiplicación de las funciones Csin y Ccos.

En la tabla 2 se tienen las coordenadas del punto terminal dado el ángulo θ, esta información se puede utilizar para hacer un bosquejo de las funciones $\mathrm{Csin}\,\theta$ y $\mathrm{Ccos}\,\theta$ con θ variando a razón de $\pi/12$ radianes.

- $\mathrm{Csin}\,\theta = x + y$

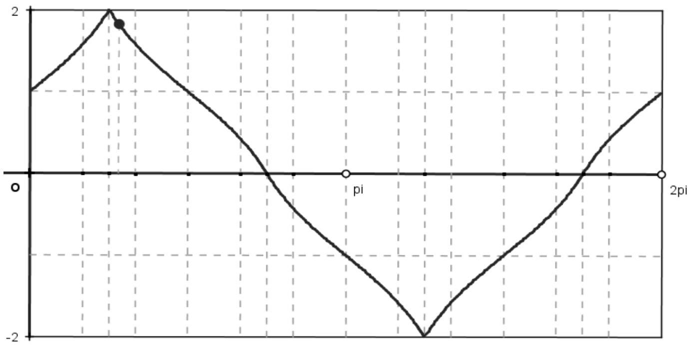


Fig. 4. Gráfica de la función $\mathrm{Csin}\,\theta$

La función $\mathrm{Csin}\,\theta$ tiene un periodo de 2π, su Dominio es todos los Reales y el Rango es $[-2,2]$, a diferencia de la función $\sin\theta$ ésta no es una función impar ya que se desplaza $\pi/4$ a la izquierda, además sus rangos son diferentes (esto se debe a que el lado del cuadrado unitario mide 2), también como se ve en la gráfica los máximos y mínimos son picos y esto hace que no sea derivable en esos puntos Las semejanzas con $\sin\theta$ es que tienen el mismo periodo, tienen infinitos ceros, máximos y mínimos (aunque por la rotación no son los mismos).

- $\mathrm{Ccos}\,\theta = x - y$

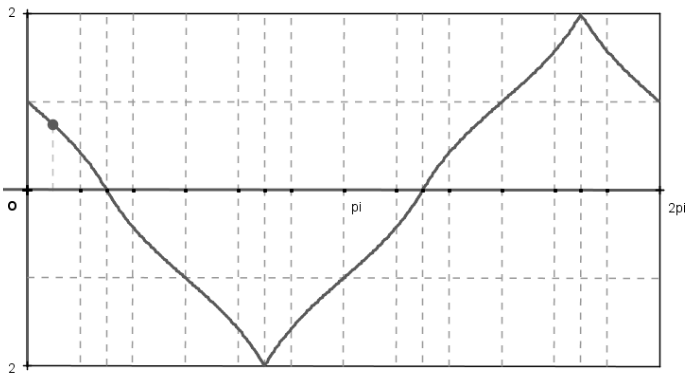


Fig. 5. Gráfica de la función $\mathrm{Ccos}\,\theta$

La función $\mathrm{Ccos}\,\theta$ tiene un periodo de 2π, su Dominio es todos los Reales y el Rango es $[-2,2]$, a diferencia de la función $\cos\theta$ esta no es una función par ya que esta desplazada $\pi/4$ a la izquierda (igual que $\mathrm{Csin}\,\theta$), además sus rangos son diferentes; también como se ve en la gráfica sus máximos y mínimos son picos lo y esto hace que no sea derivable en esos puntos Las semejanzas con $\cos\theta$ es que tienen el mismo periodo, tienen infinitos ceros, máximos y mínimos (aunque por la rotación no son los mismos).

Con base a la información anterior se invita al lector interesado a estudiar la función $\mathrm{Ctan}\theta$ y las funciones inversas, explorar los Dominios y Rangos, determinar nuevas identidades, desarrollar ecuaciones, investigar aplicaciones, gráficas y trasformaciones, y analizar como se comportan éstas en comparación con las funciones trigonométricas del círculo.

2. GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES CON TRIGONOMETRIA DEL CUADRADO.

Recordemos que un sistema de coordenadas polares utiliza distancias y direcciones para dar la ubicación de un punto en el plano. Se elije un punto fijo O llamado polo y se dibuja desde O una semirrecta llamada eje polar. Para cada punto P se asignan coordenadas polares P (r, A).

Las funciones de la trigonometría del cuadrado de pueden representar en coordenadas polares utilizando las definiciones anteriormente vistas.
A continuación se estudiarán algunos tipos de ecuaciones polares utilizando funciones trigonométricas en la trigonometría del cuadrado.

2.1 CCÍRCULOS

Las ecuaciones polares generales de este tipo son:

$$r = k\mathrm{Csin}\theta \quad , \quad r = k\mathrm{Ccos}\theta$$

Donde k es una constante. Dan como resultado *pétalos* rotados 45°, a medida que k aumenta la longitud del pétalo también lo hace (fig. 6).

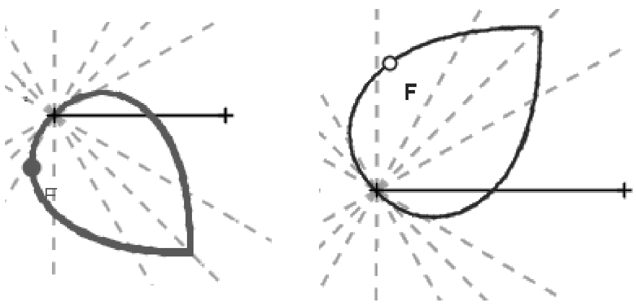


Fig. 6. Pétalos con $k = 1$. A la izquierda $r = \mathrm{Ccos}\theta$ y a la derecha $r = \mathrm{Csin}\theta$

2.2 CCARDIOIDES

Las ecuaciones polares generales de este tipo son:

$$r = \mathrm{Csin}\theta + b \quad , \quad r = \mathrm{Ccos}\theta + b$$

La constante desplaza la función en coordenadas cartesianas b unidades verticalmente.

En coordenadas polares la constante $b \neq 0$ deforma el pétalo; si $|b| < 2$ se crea un "hijo" cuya longitud varía a medida que b lo hace y la longitud del pétalo es mayor entre mas cerca este b de 2 (fig. 7).

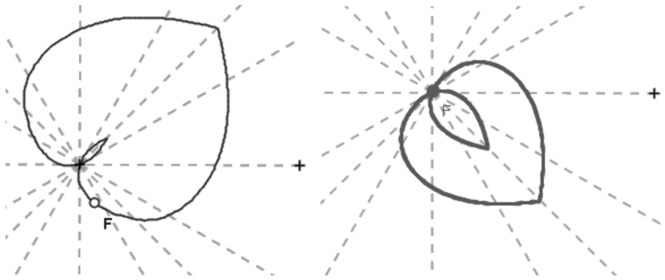


Fig. 7: CCardioides con $|b| < 2$: a la izquierda $r = \mathrm{Csin}\theta + 1.5$ y a la derecha $r = \mathrm{Ccos}\theta - 0.4$

Cuando $|b| = 2$ la longitud del Ccardioide es 2 (suponiendo que $k = 1$) (fig. 8).

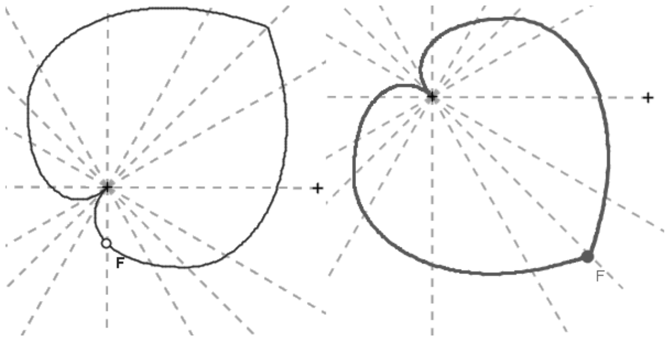


Fig. 9: CCardioides con $|b| = 2$: a la izquierda $r = \mathrm{Csin}\theta + 2$ y a la derecha $r = \mathrm{Ccos}\theta + 2$

Si $|b| > 2$ se deforma el Ccardioide pero en vez de aparecer un "hijo" el punto que estaba en el centro polar se aleja de éste y la longitud crece a medida que $|b|$ lo hace (fig. 9).

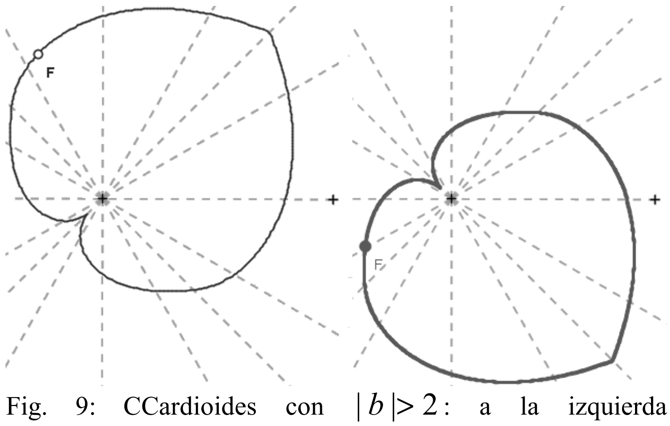


Fig. 9: CCardioides con $|b| > 2$: a la izquierda $r = \mathrm{Csin}\theta + 2.3$ y a la derecha $r = \mathrm{Ccos}\theta + 2.6$

2.3 CFLORES

Las ecuaciones polares generales de este tipo son:

$$r = \mathrm{Csin}(k\theta) + b \quad , \quad r = \mathrm{Ccos}(k\theta) + b$$

El comportamiento de la constante *b* es el mismo al presentado en los Ccardioides y dependiendo de si $|b| < 2$, $|b| = 2$ o $|b| > 2$ las flores tienen pétalos pequeños o hijos; no tienen y los pétalos están en el centro polar; o tiene pétalos que no están en el centro polar y se agrandan a medida que $|b|$ crece.

El comportamiento de k $(k \in ¥)$ depende de si es par o impar y rota la flor dependiendo del valor que tome. En coordenadas cartesianas k modifica el periodo de la función, en coordenadas polares k modifica el número de pétalos de la gráfica polar.

- Si $|b| \geq 2$ resulta una flor con *k* pétalos y la longitud depende de $|b|$ (Fig. 10)

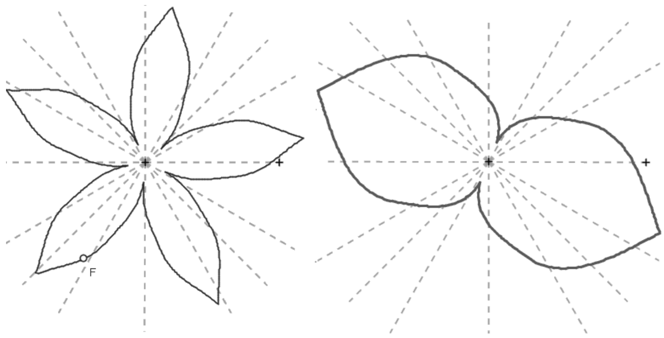


Fig 10. Cflores: a la izquierda $r = \mathrm{Csin}5\theta - 2.3$, a la derecha $r = \mathrm{Ccos}2\theta + 2.4$

- Si $|b| < 2$ y *k* es par resulta una flor con *2k* pétalos con diferentes longitudes (*k* pétalos tienen longitud *m* y *k* pétalos tienen longitud *n*) (Fig. 11).

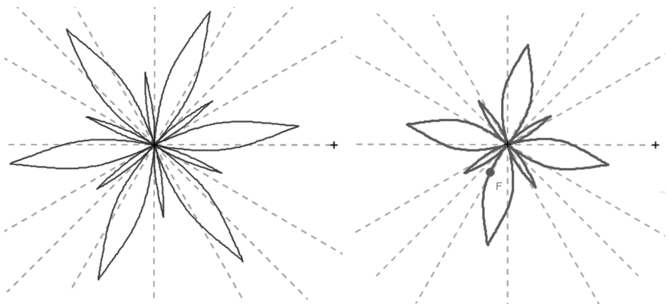


Fig. 11. Cflores: a la izquierda $r = \mathrm{Csin}6\theta - 0.6$, a la derecha $r = \mathrm{Ccos}4\theta + 0.8$

- Si $|b| < 2$ y *k* es impar resulta una flor con *k* pétalos y *k* "hijos" que están adentro de cada pétalo (*k* pétalos tienen longitud *m* y *k* "hijos" tienen longitud *n*)(Fig. 12).

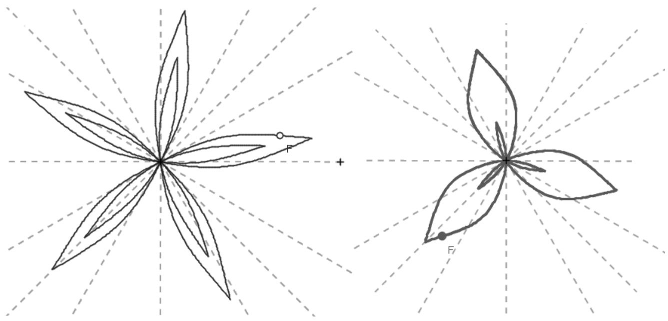


Fig. 12. Cflores; a la izquierda $r = \mathrm{Csin}5\theta + 1.6$, a la derecha $r = \mathrm{Ccos}3\theta + 0.3$

3. CONCLUSIONES

Generalmente el en currículo de la educación media se aborda el amplio concepto de trigonometría, lo que se presenta en este artículo es un abrebocas en el cual se cambia la forma de definir y construir las funciones trigonométricas explorando una trigonometría análoga a la convencional. Se invita al lector a jugar con estas nuevas funciones; hacer transformaciones, cambiar periodo, ampliar rango y combinarlas para crear nuevas; estudiar las funciones inversas y descubrir características y similitudes con las convencionales; pensar si las identidades conocidas se cumplen en este nuevo sistema, crear mas identidades y demostrarlas; resolver sistemas de ecuaciones; y usarlas en la solución de problemas de medidas o de triángulos.

No siempre en el currículo de la educación básica o media se presentan temas de representaciones gráficas en diferentes coordenadas y generalmente se trabaja las coordenadas polares; las gráficas de las ecuaciones polares en donde se involucran las nuevas funciones trigonométricas dan Cflores más similares a las flores de la naturaleza que las que dan al trabajar con las funciones convencionales. Este tema solo mostró una pequeña parte dejando mucho por estudiar, como por ejemplo rotar las gráficas o hacer ecuaciones polares en las cuales intervengan varias funciones trigonométricas, esto queda al interés del lector.

REFERENCIAS

[1] STEWART, James. Precálculo. Cuarta Edición. Editorial Thomson

[2] BIDDLE, J. The square function: An abstract system for trigonometry. The Mathematics Teacher, Vol. LX, Número 2, 121-123, 1967.

[3] BAUTISTA, Leonardo. MOLINA. Javier. Trigonometría del Cuadrado. XVII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, V Encuentro de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. 2006