Instituto
Universidad
Tecnológico
Nacional
de
Autónoma
Tlalnepantla de
México

Nuestras instituciones, le agradecen al comité organizador, por la gentileza que tuvieron para invitarnos a tan relevante evento; que, asistimos con mucha alegría y gran satisfacción.

México, D.F., agosto de 07

Instituto
Universidad
Tecnológico
Nacional
de
Autónoma
Tlalnepantla de
México

Ponencia:

Una nueva alternativa para la resolución de determinantes, a través del teorema del determinante simétrico.

México, D.F., agosto de 07

Instituto
Universidad
Tecnológico
Nacional
de
Autónoma
Tlalnepantla de
México

Equipo de trabajo:

- **Rosalía Trujillo Sánchez**
- **Jesús López Sánchez y**
- **Teodoro M. Ceballos**

México, D.F., agosto de 07

Introducción

- Con este trabajo, buscamos intercambiar resultados científicos, experiencias y didácticas, sobre diferentes enfoques en la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza tecnológica y universitaria.

El presente reporte:

Aborda una problemática sobre la enseñanza de la matemática en la carrera de *Ingeniería Industrial*; en la asignatura de álgebra lineal y particularmente, con la resolución de determinantes de orden (2x2) y orden superior; a través del Teorema del Determinante Simétrico.

Planteamiento del problema

Cuando se aborda en el Discurso Matemático Escolar (DME), la teoría de resolución de determinantes; utilizamos el método de Gabriel Cramer, Sarrus o reducción del orden.

En la aplicación de estos métodos, siempre se considera tomar un sentido positivo y otro negativo, es decir

Regla de Cramer
Orden (2x2) ó básico:

$$\det A = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

$\longrightarrow$ Sentido positivo

$\longrightarrow$ Sentido negativo

Orden (3x3) ó Superior

$$\det B = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

Método de reducción, transformación de orden o de los cofactores:

$$\det A = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \atop \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

Sentido positivo

Sentido negativo

de donde

$$\det A = +\, x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - \, x_{12} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + \, x_{13} \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$$

Método de Sarrus

(1) Columnas aumentadas

$$\det A = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \vdots & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \vdots & x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \vdots & x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$$

(2) Renglones aumentados

$$\det B = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

Este uso de sentido positivo y la inadecuada didáctica de que al sentido negativo lo multiplicamos por (-1); provoca en el aprendedor, mucha incertidumbre, pues en la mayoría de los casos, éstos tienden a equivocarse, y dado que este es uno de los dos temas que contiene una unidad de estudio de la materia de álgebra lineal; casi siempre la reprueban.

¿Contribuirá como un nuevo método el Teorema del Determinante Simétrico, para alcanzar un aprendizaje significativo, para la resolución de determinantes de orden básico y de orden superior; contra los métodos antes mencionados?

Justificación:

Como una costumbre académica en la enseñanza de la teoría de determinantes; siempre favorecemos, la regla de Cramer para resolver determinates de orden (2x2) y el método de los cofactores para uno de (3x3) y que en nuestro trabajo llamamos el primero de orden superior.

Esta regla que por cierto es uno de los teoremas de Cramer; en su aplicación se complica por el manejo de los sentidos positivo, negativo y por lo que a este; además, se le tiene que multiplicar por (- 1), hace que la regla no sólo sea confusa, sino que la vuelve muy lenta para el cálculo del valor del determinante.

Mientras que:

El teorema del Determinante Simétrico (TDS), es un nuevo método alternativo que tiene dos ventajas singulares: primero, no se emplea el sentido positivo y negativo que se utiliza con la regla de Cramer; sino que, únicamente usa la entrada primaria que propuso Leibniz y segundo, al no utilizar este algoritmo de Cramer; sencillamente, el TDS es más rápido para el cálculo del valor del determinante.

Objetivo:

Los aprendedores serán capaces de resolver determinantes de orden básico y de orden superior, i.e.; (*2x2*), (*3x3*),…,(*nxn*): *n es un entero* (+), con un nivel de aceptación de 100 %, después de haberse llevado a cabo un aprendizaje significativo.

Hipótesis del trabajo:

Todos los alumnos que cursan la materia de álgebra lineal en la carrera de Ingeniería Industrial, dominarán sin error, la Teoría del Teorema del Determinante Simétrico; para resolver determinantes de orden (2x2) y como consecuencia, aprobarán la unidad de estudios.

Fundamentación teórica:

Teorema JCE- 1 (*del Determinante Simétrico con sentido derecho inyectivo, directo o con entrada primaria de Leibniz*). *Sea el*

y $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$ $; \forall\, \alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \varphi, \gamma, \eta \,\&\, \lambda \in$ IR

$\Rightarrow |A|_{Simétrico} = \alpha\lambda - \beta\delta \quad \therefore |A| = \alpha\lambda - \beta\delta;$; mientras que, el

$$|B|_{Simétrico} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi) \Rightarrow |B|$$

$$|B| = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

Teorema JCE- 2 (*del determinante simétrico con sentido izquierdo inyectivo o con entrada secundaria de Leibniz)*. Sea el

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$$ y

$$|B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix} \quad ;\forall \alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\varphi,\gamma,\eta \,\&\, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |A| \xrightarrow{R} |A|_{Sim\acute{e}trico\,(ES)} = \alpha\lambda - \beta\delta$$ mientras que el

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{Sim\acute{e}trico} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

Ejercicio. Calcular el valor de los determinantes de A y B, si estos están por

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Utilizando los métodos de: (a) Cramer, (b) Cayley, (c) Sarrus e (d) el determinante simétrico definido por los Teoremas JCE-1 con EPL y finalmente, (e) el determinante simétrico definido por el Teorema JCE-2 con ESL.

Solución (a). Como el

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-2_{EP} & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 3_{ES}\\ 4 & 5\end{vmatrix}=(-2)(5)-(3)(4)=-10-12=-22\therefore |A|=-22.$$

y como el $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3}\\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2}\\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1}\end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix}6_{ES_3} & 3_{ES_2} & 2_{ES_1}\\ 2_{ES_2} & -5_{ES_1} & 7_{ES_3}\\ 4_{ES_1} & -1_{ES_3} & 8_{ES_2}\end{vmatrix}$

$$|B|=\{[\text{Productos de } EP_1]+[\text{Productos de } EP_2]+[\text{Productos de } EP_3]\}-$$

$-\{[\text{Productos de } ES_1]+[\text{Productos de } ES_2]+[\text{Productos de } ES_3]\}$, de donde se implica que

$$|B|=[(6)(-5)(8)+(3)(7)(4)+(2)(-1)(2)]-[(2)(-5)(4)+(3)(2)(8)+(6)(-1)(7)]=[-240+84-4]-[-40+48-42]$$

$$|B|=-160-(-34)=-160+34=-126\Rightarrow |B|=-126.$$

Solución (b). $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2_{EP} & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4^{ES} & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) - (4)(3) = -10 - 12 = -22 \therefore |A| = -22$

y como el $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} \\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} \\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} 6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1} \\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2} \\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3} \end{vmatrix}$

$$|B| = \{[\mathrm{Productos\ de\ } EP_1] + [\mathrm{Productos\ de\ } EP_2] + [\mathrm{Productos\ de\ } EP_3]\} -$$

$-\{[\mathrm{Productos\ de\ } ES_1] + [\mathrm{Productos\ de\ } ES_2] + [\mathrm{Productos\ de\ } ES_3]\}$, de donde se implica que

$$|B| = [(6)(-5)(8) + (3)(7)(4) + (2)(-1)(2)] - [(4)(-5)(2) + (-1)(7)(6) + (8)(3)(2)] = [-240 + 84 - 4] - [-40 - 42 + 48]$$

$$|B| = -160 - (-34) = -160 + 34 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

Solución (c). Como todos sabemos, este método únicamente es aplicable para resolver determinante de orden (3×3)

Además, sólo calcularemos para el caso de columnas aumentadas, veamos

Con el $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} & 6_{EP_1} & 3_{EP_2} \\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} & 2_{EP_3} & -5_{EP_1} \\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} & 4_{EP_2} & -1_{EP_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1} & 6_{ES_2} & 3_{ES_3} \\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2} & 2_{ES_3} & -5_{ES_1} \\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3} & 4_{ES_1} & -1_{ES_2} \end{vmatrix}$;

de donde se desprende que el

$$|B| = [(6)(-5)(8) + (3)(7)(4) + (2)(2)(-1)] - [(4)(-5)(2) + (-1)(7)(6) + (8)(2)(3)] = [-240 + 84 - 4] - [-40 - 42 + 48]$$

$$|B| = -160 - (-34) = -160 + 34 = -126 \Rightarrow |B| = -126$$

Solución (d). Teorema JCE-1 del Determinante Simétrico con EPL, con el

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|_{Simétrico} = \begin{vmatrix} -2_{EP} & 3_{EP} & 2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(5) + (3)(-4) = (-10) + (-12) = -22 \Rightarrow |A| = -22.$$

con el $$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B|_{\substack{Con\ reducción \\ de\ orden}} = 6\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{Simétrico\ (EPL).} = 6\begin{vmatrix} -5_{EP} & 7_{EP} & 5 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2_{EP} & 7_{EP} & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2_{EP} & -5_{EP} & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|B|_{Simétrico} = 6[(-5)(8) + (7)(1)] - 3[(2)(8) + (7)(-4)] + 2[(2)(-1) + (-5)(-4)]$$

$$|B|_{Simétrico} = 6[-40 + 7] - 3[16 + (-28)] + 2[(-2) + 20] = 6[-33] - 3[-12] + 2[18] = -198 + 36 + 36 = -198 + 72$$

$$|B|_{Simétrico} = -126 \Rightarrow |B| = -126$$

Solución (e). Como el

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)|A|_{Simétrico\ con\ (ESL)} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4^{ES} & 5^{ES} & -4 \end{vmatrix}$$; por consiguiente, el

$$|A| = (-1)[(4)(3) + (5)(2)] = (-1)[12+10] = (-1)[22] = -22. \Rightarrow |A| = -22.$$

Solución (1.4.2- Teorema JCE- 2 del Determinante Simétrico con entrada secundaria de Leibniz). Como el

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B|_{\substack{\text{Con reducción} \\ \text{de orden}}} = 6\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

de donde, $|B| \xrightarrow{R} |B|_{\substack{\text{Simétrico reducido en orden} \\ \text{con entrada de signo} \\ \text{negativo.}}}$; es decir el

Entrada con signo negativo.

$\downarrow$

$$|B| = -6\begin{vmatrix} -5 & 7 & 5 \\ -1^{ES} & 8^{ES} & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 4^{ES} & 8^{ES} & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 4^{ES} & -1^{ES} & -4 \end{vmatrix}$$

|B| = - 6[(- 1)(7)+ (8)(5)]+ 3[(4)(7)+ (8)(- 2)]- 2[(4)(- 5)+ (- 1)(- 2)]= - 6[- 7+ 40]+ 3[28-

$$|B| = -6[33] + 3[12] - 2[-18] = -198 + 36 + 36 = -198 + 72 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Los Teoremas JCE- 1 y 2 del determinante simétrico con entradas primaria y secundaria de Leibniz, sólo pueden ser aplicados a determinantes de orden (2x2) que son la última reducción de orden a la que converge un determinante de orden superior (DOS), i.e., determinantes de orden $(3x3), (4x4), \ldots, (nxn) : n \in \mathbb{N}^+$

Por ejemplo, el determinante de orden superior (3x3), se transforma en tres de orden base (2x2) al pivotear en los elementos $+a_{11}, -a_{12}$ y $+a_{13}$ para la (ESL). Recordar el método de reducción de orden o de los cofactores para la solución de un (DOS).

Se obtienen resultados idénticos por cualquiera de los métodos, i.e., la Regla de Cramer, Cayley, Sarrus o de los Teoremas JCE- 1 y 2 del determinante simétrico.

Por los Teoremas JCE- 1 y 2 del determinante simétrico, se obtienen más rápidamente los resultados. El nuevo paradigma que en este trabajo estamos presentando, evita el conflicto que provocan los otros métodos con respecto a la multiplicación por (- 1).