FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS

CON APLICACIONES EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

JORGE ALFONSO HERNÁNDEZ
Profesor Titular de Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de El Salvador
Condominio Jardines de Altamira, Edificio 3, Apartamento 13,
Mejicanos, San Salvador, El Salvador, Centro América.
Teléfonos: Casa (503) 2232- 2738
Móvil (503) 7887- 4697
Correo electrónico: joralfher@hotmail.com
joralfher@yahoo.com.mx
joralfher@gmail.com

1. FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN Q.

Cuando se estudia el álgebra elemental se tiene como uno de sus contenidos "La factorización de polinomios", en la cual se plantean algunos "casos de factoreo" o fórmulas que indican como, dado un polinomio que tiene una forma específica puede expresarse como el producto de dos o más factores diferentes de uno, en esta ocasión se mencionan los siguientes:

La diferencia de dos Cuadrados : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

La diferencia de dos Cubos : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La suma de dos cubos : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Pero, ¿qué hay de *la suma de dos cuadrados*?; es decir:

$$a^2 + b^2 = ?$$

Muy poco o nada se dice al respecto, en los libros de álgebra elemental se afirma que no se puede factorizar sin que se obtenga factores irracionales, ya que $a^2 + b^2$ es primo; esto es, que solo es divisible por el mismo y uno, tales afirmaciones pueden llevar a pensar que todas las sumas de dos cuadrados no se pueden factorizar, en el Es por esta razón que se escribe lo siguiente:

TEOREMA 1.1: ***Sea la suma de dos cuadrados*** a^2+b^2 ***donde*** $a,b\in Q$ ***y sea*** $c=\sqrt{2ab}$***, si c es una expresión racional; es decir,*** $c=\sqrt{2ab}$ ***es una "raíz exacta" entonces*** a^2+b^2 ***se puede factorizar como*** $a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$***.***

DEMOSTRACION:

$a^2+b^2=a^2+2ab-2ab+b^2$ ya que $2ab-2ab=0$

$=a^2+ab+ab+b^2-2ab$ ya que $ab+ab=2ab$ y ley conmutativa de la suma

$=a^2+ab+ab+b^2-c^2$ ya que por hipótesis $c=\sqrt{2ab}$

$=(a^2+ab)+(ab+b^2)-c^2$ ley asociativa de la suma

$=a(a+b)+b(a+b)-c^2$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b)(a+b)-c^2$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b)(a+b)-(a+b)c+(a+b)c-c^2$ ya que $(a+b)c-(a+b)c=0$

$=[(a+b)(a+b)-(a+b)c]+[(a+b)c-c^2]$ ley asociativa de la suma

$=(a+b)[a+b-c]+c[a+b-c]$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+b+c)[a+b-c]$ ley distributiva del producto sobre la suma

$=(a+c+b)(a-c+b)$ Ley conmutativa de la suma.

Así tenemos que:

$$\text{Si } c=\sqrt{2ab}\in Q \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$$

Ejemplo 1.1 Factorizar $4x^4+81$.

Solución

Tenemos que:

$$4x^4+81 \;=\; (2x^2)^2+9^2$$

Entonces surge la pregunta:

¿Se podrá factorizar aplicando el teorema 1.1?

Con el propósito de obtener una respuesta tomamos:

$$a=2x^2$$

b = 9 y

$$c=\sqrt{2ab}=\sqrt{2(2x^2)(9)}=\sqrt{36x^2}=6x$$

De este modo tenemos que "c" es una “raíz exacta” quiere decir que si se puede factorizar aplicando el teorema 1.1.

Así, sustituyendo:

$a=2x^2$, $b=9$ y $c=6x$ en

$$a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$$

Obtenemos lo siguiente:

$$4x^4+81=(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$$

2. APLICANDO LA FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Ejemplo 2.1 Calcular la derivada de $f(x)=\dfrac{4x^4+81}{2x^2+6x+9}$.

Solución

Tenemos la función: $f(x)=\dfrac{4x^4+81}{2x^2+6x+9}$ en donde factorizaremos el numerador tomando las raíces cuadradas de los sumandos:

$$\begin{array}{ccc} 4x^4 & + & 81 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x^2 & & 9 \end{array}$$

Así $c=\sqrt{2\cdot(2x^2)\cdot(9)}=\sqrt{36x^2}=6x$

De donde obtenemos que:

$$4x^4+81=(2x^2+6x+9)\cdot(2x^2-6x+9)$$

y al sustituirlo en la función queda:

$$f(x)=\frac{\cancel{(2x^2+6x+9)}(2x^2-6x+9)}{\cancel{2x^2+6x+9}}$$

Y al simplificar se obtiene:

$$f(x)=2x^2-6x+9$$

Derivando esta última expresión tenemos que:

$$f'(x)=4x-6=2(2x-3)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f'(x)=2(2x-3)}$$

3. FACTORIZANDO LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN EL CÁLCULO INTEGRAL.

Para calcular la integral de una función tenemos varias formas de hacerlo, aplicando los diferentes métodos de integración, integrales inmediatas, integración por cambio de variable, por partes, etc.

También podemos simplificar la función, si es posible, antes de aplicar los métodos de integración y de esta manera facilitar el cálculo de su integral.

Ejemplo 3.1 Calcular $\displaystyle\int\frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}\,dx$.

Solución

Tenemos la integral $\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}dx$ en donde al factorizar el numerador obtenemos:

$$\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}dx = \int \frac{(\cancel{6x^2+6x}+3)(6x^2-6x+3)}{\cancel{6x^2+6x}+3}dx$$

$$= \int (6x^2-6x+3)\,dx$$

$$= 2x^3-3x^2+3x+C$$

Donde C es la constante de integración.

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}dx = 2x^3-3x^2+3x+C}$$

5. FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN $\Re$.

En la primera parte se planteó la factorización de aquellas sumas de dos cuadrados la cuales cumplen que: $\sqrt{2ab}$ sea una "raíz exacta", es decir, que $\sqrt{2ab}$ pertenezca al conjunto de los números racionales, nótese que el ser una "raíz exacta" garantiza su existencia.

Cuando tomamos la suma de dos cuadrados en el conjunto de los números reales, la condición de que $\sqrt{2ab}$ sea una "raíz exacta", ya no es necesaria, no importa que el resultado sea irracional; es decir, que $\sqrt{2ab} \in Q'$, pero sí hay que garantizar su existencia en el conjunto de los números reales.

Teníamos que: $C = \sqrt{2ab} \Rightarrow C^2 = \left(\sqrt{2ab}\right)^2 = |2ab|$

$$C^2 = 2|ab| = \begin{cases} 2ab, \text{ sí } ab \geq 0 \\ -2ab, \text{ sí } ab < 0 \end{cases}$$

Observemos que cuando $ab < 0$, la expresión $\sqrt{2ab}$, no existe en el conjunto de los números reales, pero cuando $ab \geq 0$, entonces $\sqrt{2ab}$ si existe en el conjunto de los números reales; esto es: Sí $ab \geq 0$ entonces $\sqrt{2ab} \in \Re$.

Pero ¿Cuando es que se cumple que: $ab \geq 0$?

Cuando $a > 0 \wedge b > 0$ ó bien cuando $a < 0 \wedge b < 0$.

Así podemos escribir lo siguiente:

Teorema 5.1: Sea la suma de dos cuadrados $a^2 + b^2$, con $a, b \in \Re$, sí $ab \geq 0$ entonces la suma de dos cuadrados se puede factorizar como: $a^2 + b^2 = \left(a + \sqrt{2ab} + b\right)\left(a - \sqrt{2ab} + b\right)$.

Demostración:

$a^2 + b^2 = a^2 + 0 + b^2$ Sumando cero, ya que $a + 0 = a$

$= a^2 + 2ab - 2ab + b^2$ Ya que 2ab – 2ab = 0.

$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$ Propiedad conmutativa de la suma.

$= a^2 + ab + ab + b^2 - 2ab$ Ya que 2ab = ab + ab

$= \left(a^2 + ab\right) + \left(ab + b^2\right) - 2ab$ Ley asociativa de la suma.

$= a\left(a + b\right) + b\left(a + b\right) - 2ab$ Ley distributiva del producto sobre la suma.

$=(a+b)\,(a+b)-2ab$ Ley distributiva del producto sobre la suma.

$=(a+b)^2-2ab$ Ya que $a\,.\,a=a^2$

$=(a+b)^2+(a+b)\,\sqrt{2ab}-(a+b)\,\sqrt{2ab}-2ab$

Ya que $(a+b)\,\sqrt{2ab}-(a+b)\,\sqrt{2ab}=0$

$=[\,(a+b)^2+(a+b)\,\sqrt{2ab}]-[\,(a+b)\,\sqrt{2ab}+2ab]$ Ley asociativa

$=(a+b)[a+b+\sqrt{2ab}]-\sqrt{2ab}\,[a+b+\sqrt{2ab}]$ Ley distributiva

$=(a+b-\sqrt{2ab})\,[a+b+\sqrt{2ab}]$ Ley distributiva

$=(a+\sqrt{2ab}+b)\,(a-\sqrt{2ab}+b)$ Ley conmutativa

Por lo tanto tenemos que:

$$\boxed{Sí\ a,b\in\Re\wedge ab\geq 0\Rightarrow a^2+b^2=(a+\sqrt{2ab}+b)(a-\sqrt{2ab}+b)}$$

Ejemplo 5.1 Factorizar $x^2+4.$

Solución

Tenemos que $x^2+4=x^2+2^2$

Tomando a = x y b = 2 tenemos que:

$$x^2+4=(x+\sqrt{2(x)(2)}+2)\,(x-\sqrt{2(x)(2)}+2)$$

$$=(x+\sqrt{4x}+2)\,(x-\sqrt{4x}+2)$$

$$=(x+2\sqrt{x}+2)\,(x-2\sqrt{x}+2)$$

Como debe de cumplirse que $ab \geq 0$; es decir, $x \cdot 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

Por lo tanto:

$$\boxed{x^2 + 4 = \left(x + 2\sqrt{x} + 2\right)\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) \; para \; x \geq 0.}$$

A continuación se muestran algunos ejemplos en el cálculo de derivadas.

Ejemplo 5.4 Calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 25}{x + \sqrt{10x} + 5}$.

Solución

Factorizando el numerador de f tenemos que:

$$f(x) = \frac{x^2 + 25}{x + \sqrt{10x} + 5} = \frac{(\cancel{x + \sqrt{10x} + 5})(x - \sqrt{10x} + 5)}{\cancel{x + \sqrt{10x} + 5}}$$

$$= x - \sqrt{10x} + 5$$

Luego derivando obtenemos:

$$f'(x) = 1 - 5(10x)^{-1/2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f'(x) = 1 - \frac{5}{\sqrt{10x}}}$$

Ejemplo 5.5 Calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 100}{x - \sqrt{20x} + 10}$.

Solución

Factorizando el numerador de f tenemos que:

$$f(x) = \frac{x^2 + 100}{x - \sqrt{20x} + 10} = \frac{(x + \sqrt{20x} + 10)(\cancel{x - \sqrt{20x} + 10})}{\cancel{x - \sqrt{20x} + 10}}$$

$$= x+\sqrt{20x}+10$$

Luego derivando obtenemos:

$$f'(x)=1+10(20x)^{-1/2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f'(x)=1+\frac{10}{\sqrt{20x}}}$$

Observemos algunos ejemplos en el cálculo de integrales.

Ejemplo 5.6 Calcular $\int \frac{x^2+9}{x+\sqrt{6x}+3}dx$

Solución

Tenemos la integral $\int \frac{x^2+9}{x+\sqrt{6x}+3}dx$ en donde factorizando el numerador tenemos:

$$\int \frac{x^2+9}{x+\sqrt{6x}+3}dx=\int \frac{(\cancel{x+\sqrt{6x}+3})(x-\sqrt{6x}+3)}{\cancel{x+\sqrt{6x}+3}}dx$$

$$= \int (x-\sqrt{6x}+3)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}x^{3/2}+3x+C$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{x^2+9}{x+\sqrt{6x}+3}dx = \frac{1}{2}x^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}x^{3/2}+3x+C}$$

6. FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS BICUADRADOS.

En las secciones 1 y 5 hemos estudiado la factorización de la suma de dos cuadrados, en el conjunto de los números racionales y reales, respectivamente.

Ahora tomaremos el caso en que tengamos la suma de dos bicuadrados, es decir, el caso en que tengamos expresiones cuadráticas elevadas al cuadrado, esto es:

$$(a^2)^2+(b^2)^2=a^4+b^4$$

Corolario 6.1: Sean $a,b\in\Re$ y a^4+b^4 una suma de dos bicuadrados entonces la suma de dos bicuadrados puede factorizarse como:

$$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2)$$

Demostración:

$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$ ya que $(a^2)^2=a^4 \quad \wedge \quad (b^2)^2=b^4$

$=(a^2+\sqrt{2a^2b^2}+b^2)(a^2-\sqrt{2a^2b^2}+b^2)$ Por el teorema 5.1 con $a^2b^2\geq 0$

$=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2) \quad \forall a,b\in\Re$

Ya que $a^2b^2\geq 0$ se cumple $\forall a,b\in\Re$

Por lo Tanto:

$$\boxed{a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2) \quad \forall a,b\in\Re}$$

Ejemplo 6.1 Factorizar x^4+y^4.

Solución

Tenemos x^4+y^4 en donde tomando $a=x \wedge b=y$

obtenemos:

$$x^4+y^4=(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$$

Ejemplo 6.4 Calcular la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^4+16}{x^2+2\sqrt{2}x+4}$

Solución

Tenemos la función $f(x)=\dfrac{x^4+16}{x^2+2\sqrt{2}x+4}$ en donde factorizando

el numerador tenemos que:

$$f(x)=\frac{x^4+16}{x^2+2\sqrt{2}x+4}=\frac{\cancel{(x^2+2\sqrt{2}x+4)}(x^2-2\sqrt{2}\cdot x+4)}{\cancel{x^2+2\sqrt{2}\cdot x+4}}$$

$$=x^2-2\sqrt{2}x+4$$

Luego derivando obtenemos:

$$\boxed{f'(x)=2x-2\sqrt{2}}$$

Ejemplo 6.6 Calcular $\displaystyle\int\frac{81x^4+1}{9x^2+3\sqrt{2}x+1}dx$

Solución

Tenemos la integral $\int \frac{81x^4+1}{9x^2+3\sqrt{2}x+1}dx$ en donde factorizando el numerador tenemos: $\int \frac{81x^4+1}{9x^2+3\sqrt{2}x+1}dx =$

$$\int \frac{(9x^2+3\sqrt{2}x+1)(9x^2-3\sqrt{2}x+1)}{9x^2+3\sqrt{2}x+1}dx$$

$$= \int (9x^2-3\sqrt{2}x+1)dx$$

$$= 3x^3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x^2+x+C$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{81x^4+1}{9x^2+3\sqrt{2}x+1}dx = 3x^3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x^2+x+C}$$

7. LA FACTORIZACIÓN DE a^n+b^n PARA "n" PAR.

En las secciones anteriores se ha estudiado la factorización de las expresiones a^2+b^2 y a^4+b^4, en esta sección estudiaremos la factorización de a^n+b^n para $n\in N$ y n par.

Teorema 7.1 Sea la expresión algebraica a^n+b^n con $n\in N$ y n par entonces a^n+b^n se puede factorizar como:

$a^n+b^n=(a^m+\sqrt{2a^mb^m}+b^m)(a^m-\sqrt{2a^mb^m}+b^m)$ para $a^mb^m\geq 0 \quad y \quad n=2m$.

Demostración:

Tenemos la expresión $a^n + b^n$ en donde como n es par, se puede escribir de la forma $n = 2m$ con m en el conjunto de los números naturales.

Así $a^n + b^n = a^{2m} + b^{2m}$

$$= (a^m)^2 + (b^m)^2$$

Luego aplicando el teorema 5.1 tenemos:

$= (a^m + \sqrt{2a^m b^m} + b^m)(a^m - \sqrt{2a^m b^m} + b^m)$ para $a^m b^m \geq 0$

Por lo tanto:

$$\boxed{a^n + b^n = (a^m + \sqrt{2a^m b^m} + b^m)(a^m - \sqrt{2a^m b^m} + b^m) \text{ para } n = 2m \quad y \quad a^m b^m \geq 0}$$

Ejemplo 7.1 Factorizar $x^{20} + y^{20}$.

Solución

Para la expresión $x^{20} + y^{20}$ tenemos que $n = 20 = 2(10)$ en donde tomando $m = 10$ tenemos que:

$$x^{20} + y^{20} = (x^{10})^2 + (y^{10})^2$$

$$= (x^{10} + \sqrt{2 \cdot x^{10} y^{10}} + y^{10})(x^{10} - \sqrt{2 \cdot x^{10} y^{10}} + y^{10})$$

$$= (x^{10} + \sqrt{2} \cdot x^5 y^5 + y^{10})(x^{10} - \sqrt{2} \cdot x^5 y^5 + y^{10})$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x^{20} + y^{20} = (x^{10} + \sqrt{2} \cdot x^5 y^5 + y^{10})(x^{10} - \sqrt{2} \cdot x^5 y^5 + y^{10})}$$

8. FACTORIZACIÓN DE $a^m + b^n$ PARA "m" y "n" PARES.

Ahora trataremos el estudio de la generalización de la factorización de la suma de dos cuadrados, es decir, la factorización de la expresión

$a^m + b^n$ con m y n números naturales pares.

Teorema 8.1 Sea la expresión algebraica $a^m + b^n$ con $m, n \in N$ y m, n pares entonces $a^m + b^n$ se puede factorizar como:

$$a^m + b^n = (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$$

para $m = 2p$, $n = 2q$ y $a^p b^q \geq 0$.

Demostración:

Tenemos la expresión $a^m + b^n$ en donde como m y n son pares, se pueden escribir de la forma:

$$m = 2p$$

$$n = 2q$$

con p $\wedge$ q en el conjunto de los números naturales.

Así $a^m + b^n = a^{2p} + b^{2q}$

$$= (a^p)^2 + (b^q)^2$$

Luego aplicando el teorema 5.1 tenemos:

$= (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$ para $a^p b^q \geq 0$

Por lo tanto:

$a^m + b^n = (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$ para $m = 2p$, $n = 2q$ $\wedge$ $a^p b^q \geq 0$

Ejemplo 8.1 Factorizar $x^{16} + y^{28}$.

Solución

Para la expresión $x^{16}+y^{28}$ tenemos que:

$$m=16=2(8)$$

$$n=28=2(14)$$

En donde tomando $p=8 \quad \wedge \quad q=14$ tenemos que:

$$x^{16}+y^{28}=(x^8)^2+(y^{14})^2$$

$$=(x^8+\sqrt{2\cdot x^8y^{14}}+y^{14})(x^8-\sqrt{2\cdot x^8y^{14}}+y^{14})$$

$$=(x^8+\sqrt{2}\cdot x^4y^7+y^{14})(x^8-\sqrt{2}\cdot x^4y^7+y^{14})$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x^{16}+y^{28}=(x^8+\sqrt{2}\cdot x^4y^7+y^{14})(x^8-\sqrt{2}\cdot x^4y^7+y^{14})}$$

Ejemplo 8.2 Factorizar $x^{40}+y^{60}$.

Solución

Para la expresión $x^{40}+y^{60}$ tenemos que:

$$m=40=2(20)$$

$$n=60=2(30)$$

En donde tomando $p=20 \quad \wedge \quad q=30$ tenemos que:

$$x^{40}+y^{60}=(x^{20})^2+(y^{30})^2$$

$$=(x^{20}+\sqrt{2\cdot x^{20}y^{30}}+y^{30})(x^{20}-\sqrt{2\cdot x^{20}y^{30}}+y^{30})$$

$$=(x^{20}+\sqrt{2}\cdot x^{10}y^{15}+y^{30})(x^{20}-\sqrt{2}\cdot x^{10}y^{15}+y^{30})$$

Por lo tanto: $x^{40} + y^{60} =$

$$\boxed{(x^{20} + \sqrt{2} \cdot x^{10} y^{15} + y^{30})(x^{20} - \sqrt{2} \cdot x^{10} y^{15} + y^{30})}$$