FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS

CON APLICACIONES EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Factorización:

- Es el proceso de escribir una expresión algebraica como el producto de otras expresiones algebraicas diferentes de uno

LA FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS EN Q.

- *La diferencia de dos Cuadrados* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- *La diferencia de dos Cubos* : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- *La suma de dos cubos* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Que hay de la Suma de dos Cuadrados?

- Es decir: $a^2 + b^2 = ?$

Citas de algunos libros:

- OBSERVACIÓN: Note que en la tabla hay fórmula para factorizar la suma de dos cubos, pero no aparece alguna para la suma de dos cuadrados, pues es primo sobre el conjunto de los números enteros.
- MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA
- Pag. 19
- Segunda Edición
- S. T. Tan
- Editorial MATH.

- En general una **Suma de dos cuadrados** no tiene descomposición en factores racionales, es decir, factores en que no haya raíz, pero hay sumas de cuadrados que, **sumándoles** y **restándoles** una misma cantidad, pueden llevarse al caso anterior y descomponerse.
- ALGEBRA
- Pag. 157
- AURELIO BALDOR
- Editorial Publicaciones CULTURAL.

TEOREMA 1.1

- ***Sea la suma de dos cuadrados*** a^2+b^2 ***donde*** $a,b\in Q$ ***y sea*** $c=\sqrt{2ab}$ ***, si*** $c\in Q$ ***entonces*** $a^2+b^2=(a+c+b)(a-c+b)$

  .

- ***DEMOSTRACION***

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab$$

$$=(a+b)^2-c^2$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)$$

$$=(a+c+b)(a-c+b)$$

Ejemplo 1 Factorizar $4x^4+81$

- **Solución**
- Tenemos que: $4x^4+81=(2x^2)^2+9^2$
- Tomando $a=2x^2$, $b=9$ se obtiene:

$$c=\sqrt{2ab}=\sqrt{2(2x^2)(9)}=\sqrt{36x^2}=6x$$

- Luego, aplicando el teorema 1 tenemos:

$$4x^4+81=(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$$

Teorema 2:

- **Sea la suma de dos cuadrados** $a^2+b^2, con\, a,b \in \Re$ **, sí** $ab \geq 0$ **entonces:**

$$a^2+b^2=\left(a+\sqrt{2ab}+b\right)\left(a-\sqrt{2ab}+b\right)$$

Demostración

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab$$

$$=(a+b)^2-2ab$$

$$=(a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab})$$

$$=(a+\sqrt{2ab}+b)(a-\sqrt{2ab}+b)$$

Ejemplo 2: Factorizar $x^2 + 4$.

- Solución
- Tenemos que: $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$
- Tomando a = x y b = 2 obtenemos:
- $x^2 + 4 = \left(x + \sqrt{2(x)(2)} + 2\right)\left(x - \sqrt{2(x)(2)} + 2\right)$

$$= \left(x + \sqrt{4x} + 2\right)\left(x - \sqrt{4x} + 2\right)$$

$$x^2 + 4 = \left(x + 2\sqrt{x} + 2\right)\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) \; para \; x \geq 0.$$

Teorema 3

- Sean $a,b\in\Re$ y a^4+b^4 una suma de dos bicuadrados entonces:

$$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2)$$

- Demostración
- Tenemos que: $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$
- Luego aplicando el teorema 2 obtenemos: $=(a^2+\sqrt{2a^2b^2}+b^2)(a^2-\sqrt{2a^2b^2}+b^2)$
- $a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2) \quad \forall a,b\in\Re$
- Así:

Ejemplo 3: Factorizar $16x^4 + 81y^4$

- Solución:
- Tenemos que: $16x^4 + 81y^4 = (2x)^4 + (3y)^4$
- Tomando $a = 2x \wedge b = 3y$ obtenemos:

$$16x^4 + 81y^4 = [(2x)^2 + \sqrt{2}(2x)(3y) + (3y)^2][(2x)^2 - \sqrt{2}(2x)(3y) + (3y)^2]$$

- Por lo tanto:
- $16x^4 + 81y^4 = (4x^2 + 6\sqrt{2}xy + 9y^2)(4x^2 - 6\sqrt{2}xy + 9y^2)$

Teorema 4

- Sea $a^n + b^n$ con $n \in N \wedge par$ entonces

  $a^n + b^n = (a^m + \sqrt{2a^m b^m} + b^m)(a^m - \sqrt{2a^m b^m} + b^m)$
- Para $a^m b^m \geq 0$ y $n = 2m$
- Demostración:
- Como n es par se puede escribir: $n = 2m$
- Así: $a^n + b^n = a^{2m} + b^{2m} = (a^m)^2 + (b^m)^2$
- $= (a^m + \sqrt{2a^m b^m} + b^m)(a^m - \sqrt{2a^m b^m} + b^m)$ para $a^m b^m \geq 0$
- Por tanto: $a^n + b^n = (a^m + \sqrt{2a^m b^m} + b^m)(a^m - \sqrt{2a^m b^m} + b^m)$

  $para$ $n = 2m$ y $a^m b^m \geq 0$

Ejemplo 4: Factorizar $x^{32} + y^{32}$

- Solución
- Tenemos que: $n = 32 = 2(16)$ y sea $m = 16$
- Así: $x^{32} + y^{32} = (x^{16})^2 + (y^{16})^2$

$$= (x^{16} + \sqrt{2 \cdot x^{16} y^{16}} + y^{16})(x^{16} - \sqrt{2 \cdot x^{16} y^{16}} + y^{16})$$

$$= (x^{16} + \sqrt{2} \cdot x^8 y^8 + y^{16})(x^{16} - \sqrt{2} \cdot x^8 y^8 + y^{16})$$

- Por lo tanto:
- $x^{32} + y^{32} = (x^{16} + \sqrt{2} \cdot x^8 y^8 + y^{16})(x^{16} - \sqrt{2} \cdot x^8 y^8 + y^{16})$

Teorema 5

- Sea $a^m + b^n$ con m, n números naturales pares entonces $a^m + b^n = (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$
  para $m = 2p, \quad n = 2q \quad y \quad a^p b^q \geq 0$
- Demostración
- Como m y n son pares: $m = 2p$ y $n = 2q$
- Así: $a^m + b^n = a^{2p} + b^{2q} = (a^p)^2 + (b^q)^2$

$$= (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$$

- Por tanto: $a^m + b^n = (a^p + \sqrt{2a^p b^q} + b^q)(a^p - \sqrt{2a^p b^q} + b^q)$

  para $m = 2p, \quad n = 2q \quad y \quad a^p b^q \geq 0$

Ejemplo 5: Factorizar $x^{16} + y^{28}$

- Solución
- Tenemos $m = 16 = 2(8)$ y $n = 28 = 2(14)$ tomando $p = 8 \quad \wedge \quad q = 14$ obtenemos:

$$x^{16} + y^{28} = (x^8)^2 + (y^{14})^2$$

$$= (x^8 + \sqrt{2 \cdot x^8 y^{14}} + y^{14})(x^8 - \sqrt{2 \cdot x^8 y^{14}} + y^{14})$$

$$= (x^8 + \sqrt{2} \cdot x^4 y^7 + y^{14})(x^8 - \sqrt{2} \cdot x^4 y^7 + y^{14})$$

- Por lo Tanto:
- $x^{16} + y^{28} = (x^8 + \sqrt{2} \cdot x^4 y^7 + y^{14})(x^8 - \sqrt{2} \cdot x^4 y^7 + y^{14})$

Aplicación en el cálculo diferencial

- Calcular la de derivada de $f(x) = \dfrac{4x^4 + 81}{2x^2 + 6x + 9}$
- Solución
- Factorizando el numerador tenemos:

$$f(x) = \frac{4x^4 + 81}{2x^2 + 6x + 9} = \frac{\cancel{(2x^2 + 6x} + 9)(2x^2 - 6x + 9)}{\cancel{2x^2 + 6x} + 9}$$

$$= 2x^2 - 6x + 9$$

- Por lo tanto:

$$f'(x) = 4x - 6$$

Aplicación en el cálculo integral

- Calcular $\displaystyle\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}\,dx$
- Solución
- Tenemos que: $\displaystyle\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}\,dx = \int \frac{\cancel{(6x^2+6x+3)}(6x^2-6x+3)}{\cancel{6x^2+6x+3}}\,dx$

$$= \int (6x^2-6x+3)\,dx$$

- Por lo tanto: $\displaystyle\int \frac{36x^4+9}{6x^2+6x+3}\,dx = 2x^3-3x^2+3x+C$

Aplicación en Economía

- La empresa “ERHA S.A. de C.V.”, fabricante de lentes con filtro solar, los vende a un precio unitario de \$25.00 y tiene la siguiente función de utilidad , $u(q) = \frac{-(q^8 + 2{,}500)}{q^4 + 10q^2 + 50} + 45$. Determinar:

c) La función de utilidad marginal

d) La utilidad marginal de producir y vender 2 unidades

Solución

- Simplificando tenemos:

$$u(q)=\frac{-(q^8+2{,}500)}{q^4+10q^2+50}+45=\frac{-\cancel{(q^4+10q^2+50)}(q^4-10q^2+50)}{\cancel{q^4+10q^2+50}}+45$$

$$=-(q^4-10q^2+50)+45 \quad =-q^4+10q^2-5$$

d) La función de utilidad marginal es:

$$u'(q)=-4q^3+20q$$

f) La utilidad marginal para q= 2 es:

$$u'(2)=-4(2)^3+20(2)=8\ dólares$$

$$Sea \quad f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^4+4}, \quad verificar\ que \quad f'(x)=-\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

- Solución:

$$\text{Se tiene que:} \quad f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^4+4}$$

$$\text{Factorizando el denominador:} \quad f(x)=\frac{\cancel{x^2-2x+2}}{(x^2+2x+2)\cancel{(x^2-2x+2)}}$$

$$\text{Simplificando:} \quad f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$\text{Así:} \quad f'(x)=-\frac{2\mathrm{x}+2}{(x^2+2x+2)^2}$$