TÍTULO:

¿CUÁNDO SE PUEDE APLICAR LA INTEGRAL DEFINIDA PARA RESOLVER UN PROBLEMA?

AUTOR: Dr. Reinaldo Hernández Camacho.

Profesor Titular de Matemática.

Doctor en Ciencias Pedagógicas.

CENTRO: Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”. Cuba.

EMAIL: reinaldo.hernández@umcc.cu

TELEFONO PARTICULAR: 283057

DIRECCIÓN PARTICULAR: Calle 115 entre 342 y 344. Edificio Micro A.

Reparto Armando Mestre. Ciudad de Matanzas. Cuba.

CAMPO DE INVESTIGACIÓN: Resolución de problemas matemáticos.

NIVEL DE ENSEÑANZA: Universitaria.

RESUMEN

Para un estudiante universitario, por lo general, representa una tarea bastante difícil, poder identificar cuándo debe aplicar la integral definida para resolver un problema que sea totalmente nuevo para él. Sin embargo, de poco sirven las habilidades que se tengan para calcular una operación matemática si no se es capaz de reconocer cuándo se debe emplear esa operación en la solución de un problema.

En este trabajo se presenta un conjunto de propiedades que caracterizan a todos los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida. Experimentos pedagógicos realizados durante varios años, han demostrado, que cuando los estudiantes aprenden a utilizar esa caracterización, aumentan sus posibilidades para identificar cuándo deben aplicar la integral definida en la solución de un problema.

DESARROLLO

Reconocer cuándo se debe aplicar la integral definida para modelar un problema, que sea totalmente nuevo para la persona que esté intentando resolverlo, teniendo como único recurso la definición tradicional de esta operación matemática, no resulta nada fácil. La definición tradicional arroja muy poca luz sobre las características que debe tener un problema para que pueda ser resuelto mediante una integral definida.

A continuación se presentará otra definición de la integral definida, que es equivalente a la definición tradicional, pero que está compuesta por un conjunto de propiedades que caracterizan a este concepto, lo cual facilita el reconocimiento de cuándo éste puede ser aplicado en la solución de un problema.

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

(Para funciones seccionalmente continuas).

Sea F un conjunto de funciones reales definidas y seccionalmente continuas en todo punto de un intervalo $[a,b]$.

La integral definida de una función f $\in$F en el intervalo $[a,b]$, se denota $\int_a^b f(x)dx$ y se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

a) Si f es constante e igual a C en un intervalo $[m,n] \subset [a,b]$, entonces

$$\int_m^n f(x)dx = C(n - m)$$

b) Si f(x) $\le$ g(x) para todo x $\in$ $[m,n] \subset [a,b]$ y g $\in$ F, entonces

$$\int_m^n f(x)dx \le \int_m^n g(x)dx$$

c) Para toda partición P= $\{x_0, x_1, x_2, ..x_p\}$ de $[m,n] \subset [a,b]$ se cumple que:

$$\int_m^n f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)dx$$

OBSERVACIONES:

- Esta definición alternativa es más apropiada que la definición tradicional para reconocer cuándo puede aplicarse la integral definida en la solución de un problema, pero no lo es para el desarrollo de habilidades en el cálculo de integrales definidas.
- Es recomendable introducir esta definición cuando se vayan a resolver problemas aplicando la integral definida, después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en el cálculo de esta operación.

- La equivalencia entre la definición alternativa que se ha dado aquí y la definición tradicional de integral definida, está contenida en un teorema con su demostración, que puede verse en la tesis de doctorado del autor de este trabajo.
- Esta definición permite hacer una caracterización general de todos los problemas que pueden ser modelados mediante una integral definida.

CARACTERIZACÓN DE LOS PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE MEDIANTE UNA INTEGRAL DEFINIDA.

Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, S el conjunto de las soluciones de dichos problemas y F un conjunto de funciones reales definidas en puntos de un intervalo [a,b], donde, para cada problema $p \in P$ su solución $s \in S$ está relacionada con una función $f \in F$.

Entonces, la solución **s** de un problema $p \in P$, que está relacionada con una función $f \in F$ en [a,b], es equivalente a $\int_a^b f(x)dx$ si se cumple que:

a) f está definida y es seccionalmente continua en todo punto del intervalo $[a,b]$.

b) En ese tipo de problemas, si la función asociada fuera constante en $[a,b]$; es decir, si fuera una función g al que g(x)=c para todo $x \in [a,b]$, entonces la solución sería **s**=c(b- a).

c) La solución **s** de un problema de ese tipo, en un intervalo $[a,b]$, no se altera si se realiza cualquier partición de $[a,b]$ y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada uno de los subintervalos en que se ha dividido $[a,b]$.

d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor será la solución **s** del problema.

OBSERVACIONES:

- En este trabajo, la expresión **tipo de problemas**, se utiliza con el significado siguiente: Conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en un intervalo $[a,b]$, y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.
- Es recomendable que se presenten a los estudiantes tanto problemas que puedan ser modelados mediante una integral definida, como otros que no puedan serlo porque incumplan alguna de las propiedades necesarias y suficientes.
- Para que una persona pueda analizar si en un problema se cumplen o no cada una de las propiedades que componen la caracterización anterior, es necesario que comprenda el contexto del problema desde el punto de vista extramatemático.
- Una función que sea continua en un intervalo es, naturalmente, seccionalmente continua en ese intervalo.

EJEMPLOS DONDE SE APLICA LA CARACTERIZACIÓN

Analizar si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo indicado.

EJEMPLO 1

A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en libras por días de un cerdo es $f(x)=0,002x+0,4$, donde x indica la edad en días. ¿Cuántas libras aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

ANÁLISIS:

a) La función f está definida y es continua en todo punto del intervalo $[40;100]$.

b) Si la función asociada fuera constante (si fuera una constante C la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta el cerdo en el intervalo $[40;100]$), podría obtenerse multiplicando esa constante C por la longitud del intervalo. Es decir, la solución sería: $S=C(100-40)$.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), mayor será la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta entre los 40 y los 100 días de nacido).

d) Si se realiza cualquier partición del intervalo $[40;100]$ y se calcula el aumento en libras del cerdo en cada uno de los subintervalos obtenidos mediante esa partición, la suma de los aumentos producidos en cada uno de los subintervalos, será siempre igual al aumento total en el intervalo [40;100].

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral definida.

$$\therefore \mathrm{S} = \int_{40}^{100} (0{,}002x + 0{,}4)dx = 32{,}4$$

El puerco aumenta 32,4 libras entre los 40 y los 100 días de nacido.

EJEMPLO 2

Calcular el área de un rectángulo, que tiene como base al intervalo [2;8] del eje de las x; y cuya altura es el máximo de la función f definida por $f(x)=x^2$ en el propio intervalo [2;8].

ANALISIS:

a) La función f está definida y es continua en [2;8].

b) Si f fuera constante la solución podría obtenerse mediante el producto de esa constante por la longitud del intervalo.

c) Cuando mayor sea la imagen de la función asociada mayor es la solución del problema.

d) Pero si se realizan determinadas particiones del intervalo [2;8], por ejemplo, en [2;4] y [4; 8], la suma de las soluciones en cada uno de esos dos subintervalos no es igual a la solución en el intervalo [2; 8] completo.

$S[2;8] = f(8)(8-2) = 64(6) = 384u^2$, que es en realidad la solución del problema.

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
S[2;4] + S[4;8] &= f(4)(4-2) + f(8)(8-4) \\
&= 16(2) + 64(4) \\
&= 32 + 256 = 288u^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a $\int_2^8 \mathbf{x^2 dx}$.

BIBLIOGRAFÍA

- Campistrous, L. Y Rizo, C.: "Aprende a resolver problemas matemáticos". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.

- Delgado, J.R.: "La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del conocimiento y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas". Tesis de doctorado. Ciudad de la Habana. 1999.

- Hernández, R.: "Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto". Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.

- Llivina, M.J.: "Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos". Tesis de doctorado. La Habana. 1999.