



COLEGIO CENTRO UNION

Primaria, Secundaria, Preparatoria

Ponencia que presenta la sección preparatoria por conducto del Profesor:

Teodoro Torres García

Al primer congreso de la Asociación Latinoamericana de Maestros de Matemáticas investigadores

A L A M M I

Agosto 1 al 5 del 2007

Titulo de la Ponencia: Una alternativa didáctica para la medición de ángulos

Objetivo General: Despertar en los alumnos el espíritu de la investigación y crear en el profesor la inquietud por aplicar técnicas diferentes que sean atractivas para la enseñanza de las matemáticas.

Resumen de la Ponencia:

Este trabajo es producto de los cursos impartidos por el Doctor Alejandro López Yáñez a los profesores de enseñanza media superior con el único afán de mejorar la enseñanza a nivel bachillerato, dicha alternativa ha proporcionado mucho beneficio a los maestros que recibimos dichos cursos, aterrizando en los principales beneficiados que son los alumnos, si bien es cierto que en algunos casos hemos empleado algunas palabras diferentes todo ha sido con el único afán de que nuestros compañeros comprendan de mejor manera esta alternativa didáctica.

ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y LA DIDÁCTICA MATEMÁTICA

Como medir ángulos.

Es bien conocido que los conocimientos matemáticos son muy variados, y que las actividades mentales también son muy variadas. Por lo que ¿no sería posible esperar a que la práctica docente incluya una cantidad de planteamientos didácticos de la organización matemática y de su calidad educativa?

Pues un profesor de matemáticas que siempre utilice didácticas iguales para temas distintos genera en sus alumnos desconfianza y problemas tales como:

- Confusión
- Conocimientos frágiles y fragmentados
- Aceptación y costumbre de manejar conocimientos mal entendidos

Baso esta información, en los efectos producidos en una alta proporción de estudiantes, por la enseñanza tradicional de la medición de ángulos, desde el nivel básico hasta el nivel medio superior.

La enseñanza tradicional de este tema, en el nivel básico, sigue el mismo esquema que el de la enseñanza de la medición de longitudes, áreas y volúmenes, teniendo como ideas conductoras, las de:

- Tamaño relativo
- Comparación
- Unidad de medida

Sin embargo, el trasfondo cognoscitivo para iniciar la enseñanza de la medición de ángulos, es muy diferente a los correspondientes para longitudes, áreas y volúmenes; ya que al comenzar la enseñanza, de la medición de estos últimos, el estudiante tiene ideas claras acerca de “que es lo que se va a medir”, esto es, los conceptos, o mejor, los objetos mentales: (de acuerdo a H. Freudenthal, longitud, áreas y volumen, ya tienen connotaciones extramatemáticas y matemáticas que les confieren contenidos o significados sustanciosos y claro. Además,

estas tres mediciones se apoyarán y entrelazarán *inmediatamente* con la aritmética usual (posicional decimal), aprendida por el estudiante.

En el caso de la medición de ángulos, el estudiante tiene ideas muy confusas acerca de “que es lo que se va a medir”, de hecho (en el nivel de enseñanza básica) el entendimiento del ángulo está estrechamente vinculado con las cuestiones de qué y cómo medirlo. Esta confusión es causada por la *complejidad del objeto mental ángulo*, y por la falta de aproximaciones cognoscitivas previas durante la enseñanza escolar; en relación a la primera causa bastaría notar que las figuras o dibujos geométricos asociados al ángulo y su medición, tienen características muy novedosas y radicalmente diferentes, de las que tienen las figuras asociadas con la medición de longitudes áreas y volúmenes. Por ejemplo, ninguno de los aspectos siguientes tiene una contraparte parecida en longitudes, áreas o volúmenes:

- Los ángulos siempre tienen un “comienzo” bien diferenciado (el vértice), pero no tienen “un final o límite”;
- Un ángulo puede ser “agrandado” sin que cambie su medida (aunque si cambia su tamaño);
- La figura del ángulo es potencialmente infinita (pero con medida finita);
- Con frecuencia la figura no determina unívocamente el ángulo.

Cuando en el nivel de enseñanza media se trata la medición de ángulos por medio de radianes, otra vez se usa el mismo tratamiento didáctico, con resultados que enriquecen la confusión ya existente.

Por causas, cuya descripción no viene al caso, el estudiante no tiene conciencia clara acerca de los problemas, cuestiones, incoherencias, y fragmentaciones de su estado cognoscitivo de la medición de ángulos. Su situación es semejante a aquella de la persona que se sospecha enferma, “porque algo anda mal”, pero no tiene la más mínima idea de cual es la enfermedad, y menos aún de la causas.

A continuación listo núcleos fenomenológicos del contexto cognoscitivo del estudiante, desatendidos por el enfoque didáctico tradicional.

1. ¿Porqué si el ángulo es la “abertura” entre dos rectas, no se mide la longitud de esa “abertura”?
2. ¿Porqué un centímetro se ve igual (del mismo tamaño) en cualquier regla, y un grado no se ve igual en cualquier transportador? ¿Porqué esto no afecta a la medición?
3. ¿No es absurdo y discordante alterar algo *antes* de medirlo? (en relación a la prolongación de los lados del ángulo).
4. ¿Porqué los ángulos se miden con “números diferentes”, que además se suman de manera diferente? (números denominados de base 60)

5. ¿Porqué no se escoge el ángulo recto (que es el más natural) como la unidad de medida? Claramente es más simple y bonito, el que una vuelta completa mida 4 unidades (o 1 unidad en lugar de 360, o 2π radianes)
6. ¿Porqué se define así el radian? ¿Realmente no dependerá del tamaño de la circunferencia?
7. ¿Porqué es necesario agregar otra forma de medir ángulos (por medio de radianes) aún más rara y nebulosa?
8. ¿Qué se obtendría al multiplicar un ángulo por un ángulo, o un grado por un grado? (En analogía a, longitud por longitud, o metro por metro.)

La *actividad de la medida* es un aspecto central de esta problemática, que también es desatendido en el enfoque tradicional. El manejo de la actividad es indispensable, si se pretende dar más racionalidad, estructura y dinamismo didáctico matemáticos a la enseñanza de la medición de ángulos.

Una alternativa didáctica

Las características matemáticas de la medición de ángulos así como de su fenomenología didáctica, sugieren fuertemente la necesidad de un tratamiento longitudinal, que tenga como hilos conductores las ideas de:

- Medición de longitudes
- Aditividad de la medida
- Cociente de longitudes
- Semejanza

Y durante el cual el estudiante vaya enfrentando (de ser posible elaborando explícitamente) y contestando las cuestiones numeradas en la sección anterior.

Este tratamiento debe tener como principios fundamentales:

- a) Si es posible medir los ángulos por medio de la medición y combinación de ciertas longitudes.
- b) Por medio de la exploración y descubrimiento el estudiante determinará cuales son estas “longitudes” y cómo deben relacionarse.

Durante el desarrollo de esta alternativa didáctica deben explorarse las situaciones siguientes:

1. Se elije una distancia fija d al vértice sobre cada lado, determinándose así los puntos A y B. En este caso la medida del ángulo sería la longitud del segmentp **AB** (figura 1).

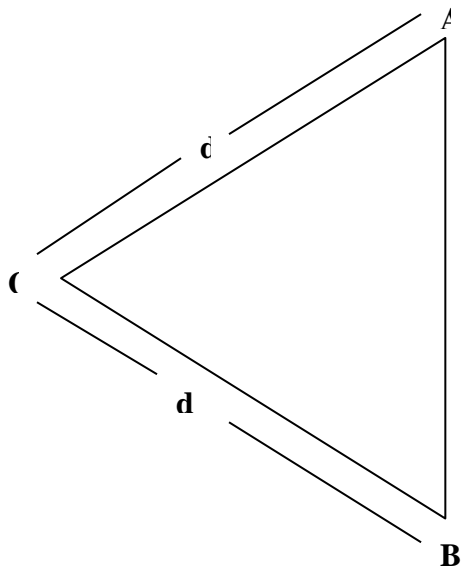
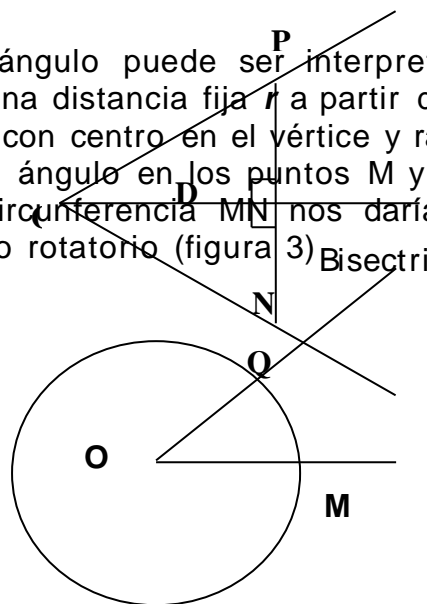


FIG 1. Medida del ángulo $\text{AOB} = a$ longitud del segmento AB

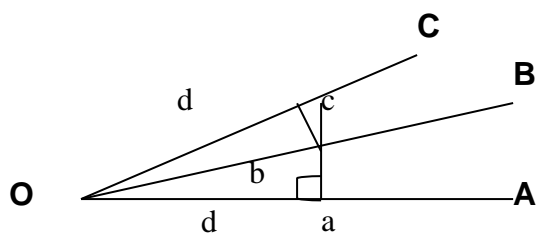
2. A una distancia fija D del vértice, se traza la perpendicular a la bisectriz del ángulo; ésta intersectará a los lados en los puntos P y Q . La medida del ángulo POQ será la longitud del segmento PQ (figura 2)

3. Dado que el ángulo puede ser interpretado como un giro, se podría elegir una distancia fija r a partir del vértice y ahí trazar la circunferencia con centro en el vértice y radio r . Esta intersectaría a los lados del ángulo en los puntos M y N , entonces la longitud del arco de circunferencia MN nos daría el tamaño del giro o desplazamiento rotatorio (figura 3)



4. En lugar de fijar la distancia al vértice, ésta podría considerarse como variable, de manera tal que tuviéramos que elegir dos o mas segmentos y combinar apropiadamente sus longitudes para determinar la medida del ángulo de una manera análoga a la que se uso para calcular áreas y volúmenes.
5. Una exploración acerca de la falta de aditividad de la medida cuando se usa la longitud de un segmento rectilíneo, podría

conducir a la necesidad de curvar uniformemente éste, y finalmente considerar un arco de circunferencia (figura 4).



Este tratamiento didáctico relacionaría e integraría la medición de ángulo con:

- Medición de longitudes, áreas y volúmenes.
- Semejanza
- Longitudes curvas
- Medición en general
- Aritmética usual
- “aritmética de medidas”

Y en consecuencia:

- Los nuevos aprendizajes se apoyarían en (y reforzarían) aprendizajes previos.
- La organización de estos conocimientos adquiriría mayor unidad, sentido y dinamismo.
- Se abrirían nuevas líneas de aprendizaje de ideas matemáticas importantes.

Primer grupo de problemas. Tomando como base la figura 2.

Problema 1: Hay tres ángulos que se encuentren sobre el mismo lado de la línea recta **AOB**, **BOC** y **COD**. El ángulo AOB es igual al ángulo COD. Compruebe que la bisectriz del ángulo BOC es perpendicular a la línea recta AOD.

Problema 2: Dados dos ángulos adyacentes, uno igual a 72° y el otro de $1\frac{3}{4}$ veces del tamaño del primero. Determine si estos son ángulos suplementarios.

Problema 3: Compruebe que el perímetro de un triángulo cuyos vértices están en los lados de un triángulo dado, es menor que el perímetro del triángulo dado.

Como podemos ver en cada caso el nuevo problema es *equivalente* al dado. Los ángulos adyacentes cuya suma es de 180° son ángulos suplementarios, es decir, el concepto de “ángulos adyacentes cuya suma es de 180° ” es equivalente al concepto de “ángulos suplementarios”. De

manera similar los conceptos “el lado común de dos ángulos suplementarios” y “perpendiculares” son equivalentes; y los conceptos “perímetro” y “suma de los lados” son equivalentes. Los dos primeros problemas se distinguen uno del otro, solo por el hecho de que en uno de ellos (el problema 1) una transición hacia un nuevo problema tiene lugar en base a una definición (la perpendicular es el lado común de dos ángulos suplementarios iguales o de dos ángulos rectos), y en el otro en base a un teorema (la suma de dos ángulos suplementarios es de 180°).

El tercer problema difiere de los dos primeros en que se requiere que el dibujo se use para identificar las figuras acerca de las cuales no se dice nada en la condición del problema.

Segundo grupo de problemas

Problema 3: Se trazan perpendiculares a los puntos A y B en los lados opuestos de la línea recta AB. Estas perpendiculares están intersectadas por la línea recta que pasa por el punto medio del segmento de línea AB en los puntos M y N. Compruebe que los segmentos de línea AM y BN son iguales.

Problema 4: Compruebe que las alturas de un triángulo equilátero son iguales.

CONCLUSIONES

Con la presente exposición de la medida de los ángulos el alumno tendrá la capacidad de poder medir longitudes de arco dependiendo de la medida del ángulo y la distancia d o bien r que es el radio y de esta manera comprender mejor el concepto de radian y sus respectivas conversiones de grados a radianes y de radianes a grados .

Como por ejemplo si r es unitario, la longitud de arco para 360° sería:

$$L_{360^\circ} = 2\pi r$$

Para 1° sería:

$$L_{1^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ}$$

Y para x° La longitud de arco sería: $L_{x^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ} x^\circ$