## Instituto Tecnológico de Tlalnepantla- ITTLA

**Tema.** Investigaciones recientes sobre temas matemáticos.

**Título de la ponencia.** Una Nueva Alternativa Didáctica para la Resolución de determinantes a Través de los Teoremas JCE-1 y 2 del Determinante Simétrico.


**Nombre.** Teodoro M. Ceballos
**Domicilio.** Retorno 803 # 19
Col. El Centinela
Delegación Coyoacán
México, D.F.
C.P. 04450
**Teléfono.** 56895964
**Correo electrónico.** Ceballos1492@yahoo.com.mx

**Nombre.** Rosalía Trujillo Sánchez
**Domicilio.** Mar Egeo # 68
Col. Lomas Lindas
Atizapan, Edo. de México.
**Teléfono.** 58254460
**Correo electrónico.** rosaliatrujillos@hotmail.com

**Nombre.** Jesús López Sánchez
**Domicilio.** Retorno 803 # 19
Col. El Centinela
Delegación Coyoacán
México, D.F.
C.P. 04450
**Teléfono.** 56895964
**Correo electrónico.** lsjesus@hotmail.com

## Universidad Nacional Autónoma de México- UNAM

**Nombre.** Teodoro M. Ceballos
**Nombre.** Jesús López Sánchez

**Una Nueva Alternativa Didáctica para la Resolución de determinantes a Través de los Teoremas JCE-1 y 2 del Determinante Simétrico.**

**Resumen**

En este trabajo estamos abordando un problema del proceso enseñanza- aprendizaje para el cálculo de determinantes de orden- $(2\times2)$, que tienen que apropiarse los aprendedores del cuarto o quinto semestre de Ingeniería, en la asignatura de Álgebra Lineal en el Instituto Tecnológico de Tlalnepantla y Facultad de Ingeniería- FI de la UNAM. El propósito fundamental que tiene esta propuesta; es que los que aprenden, conozcan y apliquen una nueva alternativa didáctica para la resolución de determinantes con este orden, a través de lo que nosotros hemos denominado, Teorema JCE-1 y 2 del Determinante Simétrico (TDS). Como consecuencia, la pregunta de investigación que nos planteamos de inicio fue: ¿contribuirá la aplicación de los TDS, para lograr un aprendizaje significativo para la solución de los mismos; contra la teoría acuñada por Leibniz, Cramer, definición de Cayley, y el método de Sarrus? Finalmente, y con el uso de estos teoremas, el objetivo es que los aprenden se apropien de un nuevo método para el cálculo de determinantes con orden $(2\times2)$ y todos los de orden superior que son reducibles a él.

## Introducción

Nuestra propuesta está ubicada en el *área de investigaciones recientes sobre temas de matemáticas*. Aquí, analizamos un problema del proceso enseñanza- aprendizaje que se presenta cuando resolvemos un determinante orden básico $(2\times2)$ o de *Orden Superior* (OS), i.e., todos aquellos que convergen a orden $(2\times2)$, o también, de $(3\times3),(4\times4),\ldots,(n\times n);\forall n\in\mathbb{Z}^+$; los determinantes con orden básico $(2\times2)$, son todos aquellos determinantes ya no pueden reducirse a otro determinante de menor orden, mientras que los determinantes de OS, son determinantes que son factibles de reducirse a orden $(2\times2)$; p.ej., el de orden $(3\times3)$ converge a tres de $(2\times2)$, el de $(4\times4)$ se reduce a cuatro de $(3\times3)$ y cada uno de éstos, en tres de $(2\times2)$; por consiguiente, el de $(4\times4)$ converge en doce de $(2\times2)$, la de $(5\times5)$ converge a 60 de $(2\times2)$ y así, sucesivamente. La teoría de determinantes es en realidad más antigua que la de matrices. Esta teoría fue descubierta por Cramer [2] durante sus trabajos orientados a la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), fue expuesta por primera vez en 1750, cien años antes de que Silvester y Cayley empezaran a hablar de matrices [3]. Así es que, cuando Gabriel Cramer introdujo su regla para resolver SEL de $(2\times2)$ y $(3\times3)$; paralelamente presentó su método para resolver los determinantes que se generan para el cálculo de las incógnitas $x, y$ o $z$; con entrada primaria (↘) y secundaria (↗). Sin embargo, históricamente se sabe que la teoría de determinantes según Dirichlet, fue introducida y acuñada por primera vez en las matemáticas por Leibniz[1] en 1693, i.e., 57 años antes que Cramer; además, también existen pruebas de que el matemático japonés Seki Takakazu, ya lo utilizaba en 1683 (*diez años antes que Leibniz*). Finalmente, hasta la fecha, los principales aportadores en esta área del conocimiento han sido Laplace, Cauchy, Jacobi, Bezout, Silvester y Arthur Cayley. Por otra parte, el campo de acción de la teoría de los determinantes es en toda la ingeniería y en las ciencias en general.

El objetivo de nuestro trabajo de investigación, es que los que aprenden, se apropien de un nuevo método alternativo para resolver determinantes de orden $(2\times2)$ y todos los de orden superior (OS) que convergen al mismo.

El planteamiento de la teoría de determinantes que estableció Leibniz, consiste en considerar entradas primarias (EP) y secundarias (ES) para resolver determinante que tuvieran orden dos y tres, p.ej.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{EP} & b \\ c \quad \searrow & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c^{ES} \nearrow & d \end{vmatrix},$$

de manera análoga sugirió una representación algebraica para un determinante de orden-3.

Mientras que, Cayley extendió la definición de los determinantes, respetando la idea de (EP) y (ES) de

Leibniz, de la siguiente forma

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11_{EP}} \searrow & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}{}^{ES} \nearrow & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (*)$$

Un procedimiento parecido define Cayley para un determinante de orden- 3. Por otra parte, Sarrus en su

método de columnas y renglones aumentados, considera también las (EP) y (ES) de Leibiniz; es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{R} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg| ,$$

de donde el

**Entrada primaria de Leibniz (EPL).**

$$\searrow \quad \searrow \quad \searrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2*)$$

$$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$$

**Entrada secundaria de Leibniz (ESL).**

esto implica que; $|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$ .

## Propuesta del Método del Determinante Simétrico (PMDS)

El método del determinante simétrico (MDS), es una nueva alternativa didáctica para calcular el valor de un determinante de orden- 2. Está basado en el siguiente proceso metodológico: paso (1), definimos a la segunda columna como columna de simetría (CS); paso (2), hacemos girar la primera columna alrededor de ésta y en el sentido contrario de como rota la tierra sobre su propio eje, dicho movimiento se considera con sentido negativo (SN); paso (3), después de mover la primer columna $\pi - radianes$, sus términos que tengan signos positivos, cambiarán a signo negativo por la teoría de la simetría de los números reales en la recta numérica; paso (4), considerando los tres pasos anteriores, construimos el determinante simétrico de A (DSA), con sentido derecho inyectivo directo o de entrada primaria de Leibniz (EPL), veamos

**Sentido derecho inyectivo directo.**

$\downarrow$ **Columna de simetría.**

$$DSA=\left|A\right|_{Simétrico}=\begin{vmatrix}\xi & \beta & -\xi \\ \zeta & \lambda & -\zeta\end{vmatrix}=\xi\lambda+(\beta)(-\zeta)=\xi\lambda+(-\beta\zeta).$$

Aquí, $\xi\lambda+(-\beta\zeta)$ es la definición desarrollada de la resta.

**Teorema JCE-1** (*del Determinante Simétrico con sentido derecho inyectivo, directo o con entrada primaria de Leibniz*)**.** Sea el

$\left|A\right|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \delta & \lambda\end{vmatrix}$ y $\left|B\right|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta\end{vmatrix}$ $;\forall\alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\varphi,\gamma,\eta\,\&\,\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|A\right|_{Simétrico}=\alpha\lambda-\beta\delta\therefore\left|A\right|=\alpha\lambda-\beta\delta;$

mientras que, el $\left|B\right|_{Simétrico}=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)\Rightarrow\left|B\right|$ $=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$.

**Demostración.** Como $\left|A\right|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \delta & \lambda\end{vmatrix}$ y $\left|B\right|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta\end{vmatrix}$, entonces el simétrico del $\left|A\right|_{simétrico}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta\end{vmatrix}$ y el $\left|B\right|_{Simétrico}=\alpha\begin{vmatrix}\varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma\end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix}\delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi\end{vmatrix}+\chi\begin{vmatrix}\delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi\end{vmatrix}$, de donde se cumple que

**Primero**

$$\left|A\right|_{simétrico}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta\end{vmatrix}=\alpha\lambda-\beta\delta$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_{EP} & \beta_{EP} & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta\end{vmatrix}=\alpha\lambda-\beta\delta$$

$$\alpha\lambda+\beta(-\delta)=\alpha\lambda-\beta\delta$$

$$\alpha\lambda+(-\beta\delta)=\alpha\lambda-\beta\delta$$

$$\alpha\lambda-\beta\delta\equiv\alpha\lambda-\beta\delta$$ L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de A es $\left|A\right|_{Simétrico}=\alpha\lambda-\beta\delta\therefore\left|A\right|=\alpha\lambda-\beta\delta$.

**Segundo.** Como el

$\left|B\right|_{Simétrico}=\alpha\begin{vmatrix}\varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma\end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix}\delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi\end{vmatrix}+\chi\begin{vmatrix}\delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi\end{vmatrix}=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$, entonces

$$\alpha\begin{vmatrix}\varepsilon_{EP} & \phi_{EP} & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma\end{vmatrix}-\beta\begin{vmatrix}\delta_{EP} & \phi_{EP} & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi\end{vmatrix}+\chi\begin{vmatrix}\delta_{EP} & \varepsilon_{EP} & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi\end{vmatrix}=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta+\phi(-\gamma)]-\beta[\delta\eta+\phi(-\varphi)]+\chi[\delta\gamma+\varepsilon(-\varphi)]=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta+(-\phi\gamma)]-\beta[\delta\eta+(-\phi\varphi)]+\chi[\delta\gamma+(-\varepsilon\varphi)]=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta-\phi\gamma]-\beta[\delta\eta-\phi\varphi]+\chi[\delta\gamma-\varepsilon\varphi]=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha\varepsilon\eta-\alpha\phi\gamma-\beta\delta\eta+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma-\chi\varepsilon\varphi=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$

$$(\alpha\varepsilon\eta+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$$ L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de B se define con $|B|\xrightarrow{R}|B|_{Simétrico}=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\phi\varphi+\chi\delta\gamma)-(\alpha\phi\gamma+\beta\delta\eta+\chi\varepsilon\varphi)$.

**Teorema JCE-2** (*del determinante simétrico con sentido izquierdo inyectivo o con entrada secundaria de Leibniz)*. Sea el

$|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \delta & \lambda\end{vmatrix}$ y $|B|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \chi\\ \delta & \varepsilon & \phi\\ \varphi & \gamma & \eta\end{vmatrix}$ ;$\forall\alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\varphi,\gamma,\eta\ \&\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow|A|\xrightarrow{R}|A|_{Simétrico\,(ES)}=\alpha\lambda-\beta\delta$;

mientras que el $|B|\xrightarrow{R}|B|_{Simétrico}=(\alpha\eta\varepsilon+\beta\varphi\phi+\chi\gamma\delta)-(\alpha\gamma\phi+\beta\eta\delta+\chi\varphi\varepsilon)$.

**Demostración.** Este teorema, es un caso particular del primero, por tal razón; al

determinante simétrico de A con orden $(2\times2)$, i.e., $|A|_{S_{(2\times2)\ con\ (ESL)}}$, lo multiplicaremos por $(-1)$

para que se cumpla que el valor numérico

del $|A|_{S_{(2\times2)\ con\ (ESL)}}=|A|_{S_{(2\times2)\ con\ (EPL)}}$. Mientras que, para aplicar la teoría del DS del $|B|$, reducimos el

orden de este, a tres determinantes de $(2\times2)$, digamos $|B_1|$, $|B_2|$ y $|B_3|$. Además, haremos la

siguiente modificación; en vez de entrar con signo positivo para la reducción de orden

para el $|B|$, i.e., $|B|=\begin{vmatrix}+ & - & +\\ \alpha & \beta & \chi\\ \delta & \varepsilon & \phi\\ \varphi & \gamma & \eta\end{vmatrix}$; entraremos con signo negativo, veamos, $|B|=\begin{vmatrix}- & + & -\\ \alpha & \beta & \chi\\ \delta & \varepsilon & \phi\\ \varphi & \gamma & \eta\end{vmatrix}$. Todo

esto, para que se cumpla que el $|B|_{S_{(2\times2)\ con\ (ESL)}}=|B|_{S_{(2\times2)\ con\ (EPL)}}$.

Ahora bien, como $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$, entonces el simétrico del $|A| \xrightarrow{R}$ $(-1)|A|_{simétrico\,con\ (ESL)}$; es decir, $|A| \xrightarrow{R} (-1)|A|_{simétrico\,con\ (ESL)} = (-1)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta^{ES}\nearrow & \lambda^{ES}\nearrow & -\delta^{ES} \end{vmatrix}$; mientras que el

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{Simétrico\ (ESL)} = -\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} - \chi\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix}$$ ; de donde,

**Primero**

$$|A| \rightarrow (-1)|A|_{Simétrico\ (ES)} = (-1)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta\nearrow & \lambda\nearrow & -\delta \end{vmatrix} = \delta\beta - \lambda\alpha.$$

$$(-1)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta^{ES}\nearrow & \lambda^{ES}\nearrow & -\delta \end{vmatrix} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$(-1)\ \{\delta\beta + \lambda(-\alpha)\ \} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$(-1)\ \{\delta\beta + (-\lambda\alpha)\ \} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$\lambda\alpha - \delta\beta \equiv \delta\beta - \lambda\alpha$$ L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de A es $|A| \xrightarrow{R} (-1)|A|_{Simétrico\,con\ (ESL)} = \delta\beta - \lambda\alpha$.

**Segundo.**

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{\substack{Simétrico \\ con\ (ESL)}} = -\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} - \chi\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$-\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma^{ES}\nearrow & \eta^{ES}\nearrow & -\gamma \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi^{ES}\nearrow & \eta^{ES}\nearrow & -\varphi \end{vmatrix} - \chi\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi^{ES}\nearrow & \gamma^{ES}\nearrow & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi + \eta(-\varepsilon)] + \beta[\varphi\phi + \eta(-\delta)] - \chi[\varphi\varepsilon + \gamma(-\delta)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi + (-\eta\varepsilon)] + \beta[\varphi\phi + (-\eta\delta)] - \chi[\varphi\varepsilon + (-\gamma\delta)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi - \eta\varepsilon] + \beta[\phi\varphi - \eta\delta] - \chi[\varphi\varepsilon - \gamma\delta] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$-\alpha\gamma\phi + \alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi - \beta\eta\delta - \chi\varphi\varepsilon + \chi\gamma\delta = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$(\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon) = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$

$$(\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\gamma\phi\alpha + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi) \equiv = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$$ L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de B se define con $|B| \xrightarrow{R} |B|_{Simétrico\,con\ (ESL)} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\varphi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\varphi\varepsilon)$.

**Presentación de resultados**

**Ejercicio.** Calcular el valor de los determinantes de A y B, si estos están por $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ y $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}$. Utilizando los métodos de: (a) Cramer, (b) Cayley, (c) Sarrus e (d) el determinante simétrico definido por los Teoremas JCE-1 con EPL y finalmente, (e) el determinante simétrico definido por el Teorema JCE-2 con ESL.

**Solución (a).** Como el

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}-2_{EP} & 3\\ 4 \;\searrow & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 3_{ES}\\ 4\;\swarrow & 5\end{vmatrix}=(-2)(5)-(3)(4)=-10-12=-22\therefore|A|=-22.$$

y como el $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3}\\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2}\\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6_{ES_3} & 3_{ES_2} & 2_{ES_1}\\ 2_{ES_2} & -5_{ES_1} & 7_{ES_3}\\ 4_{ES_1} & -1_{ES_3} & 8_{ES_2}\end{vmatrix}$

$$|B|=\{[\text{Productos de } EP_1]+[\text{Productos de } EP_2]+[\text{Productos de } EP_3]\}-$$

$-\{[\text{Productos de } ES_1]+[\text{Productos de } ES_2]+[\text{Productos de } ES_3]\}$, de donde se implica que

$$|B|=[(6)(-5)(8)+(3)(7)(4)+(2)(-1)(2)]-[(2)(-5)(4)+(3)(2)(8)+(6)(-1)(7)]=[-240+84-4]-[-40+48-42]$$

$$|B|=-160-(-34)=-160+34=-126\Rightarrow|B|=-126.$$

**solución (b).** $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}-2_{EP} & 3\\ 4\;\searrow & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4^{ES}\;\nearrow & 5\end{vmatrix}=(-2)(5)-(4)(3)=-10-12=-22\therefore|A|=-22$

y como el $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3}\\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2}\\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1}\\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2}\\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3}\end{vmatrix}$

$$|B|=\{[\text{Productos de } EP_1]+[\text{Productos de } EP_2]+[\text{Productos de } EP_3]\}-$$

$-\{[\text{Productos de } ES_1]+[\text{Productos de } ES_2]+[\text{Productos de } ES_3]\}$, de donde se implica que

$$|B|=[(6)(-5)(8)+(3)(7)(4)+(2)(-1)(2)]-[(4)(-5)(2)+(-1)(7)(6)+(8)(3)(2)]=[-240+84-4]-[-40-42+48]$$

$$|B|=-160-(-34)=-160+34=-126\Rightarrow|B|=-126.$$

**Solución (c).** Como todos sabemos, este método únicamente es aplicable para resolver determinante de
orden $(3\times3)$. Además, sólo calcularemos para el caso de columnas aumentadas, veamos

Con el $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} & 6_{EP_1} & 3_{EP_2}\\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} & 2_{EP_3} & -5_{EP_1}\\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} & 4_{EP_2} & -1_{EP_3}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1} & 6_{ES_2} & 3_{ES_3}\\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2} & 2_{ES_3} & -5_{ES_1}\\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3} & 4_{ES_1} & -1_{ES_2}\end{vmatrix}$; de donde se desprende

que el

$$|B|=[(6)(-5)(8)+(3)(7)(4)+(2)(2)(-1)]-[(4)(-5)(2)+(-1)(7)(6)+(8)(2)(3)]=[-240+84-4]-[-40-42+48]$$

$$|B|=-160-(-34)=-160+34=-126\Rightarrow|B|=-126.$$

**Solución (d).** Teorema JCE-1 del Determinante Simétrico con EPL, con el

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\Rightarrow|A|_{Simétrico}=\begin{vmatrix}-2_{EP} \searrow & 3_{EP} \searrow & 2\\ 4 & 5 & -4\end{vmatrix}=(-2)(5)+(3)(-4)=(-10)+(-12)=-22\Rightarrow|A|=-22.$$

con el $|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow|B|_{\substack{Con\ reducción\\ de\ orden}}=6\begin{vmatrix}-5 & 7\\ -1 & 8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & 8\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & -1\end{vmatrix}$

$$|B|\xrightarrow{R}|B|_{Simétrico\ (EPL).}=6\begin{vmatrix}-5_{EP} \searrow & 7_{EP} \searrow & 5\\ -1 & 8 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2_{EP} \searrow & 7_{EP} \searrow & -2\\ 4 & 8 & -4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2_{EP} \searrow & -5_{EP} \searrow & -2\\ 4 & -1 & -4\end{vmatrix}$$

$$|B|_{Simétrico}=6[(-5)(8)+(7)(1)]-3[(2)(8)+(7)(-4)]+2[(2)(-1)+(-5)(-4)]$$

$$|B|_{Simétrico}=6[-40+7]-3[16+(-28)]+2[(-2)+20]=6[-33]-3[-12]+2[18]=-198+36+36=-198+72$$

$$|B|_{Simétrico}=-126\Rightarrow|B|=-126.$$

**Solución (e).** Como el

$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\Rightarrow|A|=(-1)|A|_{Simétrico\ con\ (ESL)}=(-1)\begin{vmatrix}-2 & 3 & 2\\ 4^{ES}\nearrow & 5^{ES}\nearrow & -4\end{vmatrix}$; por consiguiente, el

$$|A|=(-1)[(4)(3)+(5)(2)]=(-1)[12+10]=(-1)[22]=-22.\ \Rightarrow|A|=-22.$$

**Solución (1.4.2- Teorema JCE-2 del Determinante Simétrico con entrada secundaria de Leibniz).** Como el

$|B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -1 & 8\end{vmatrix}\Rightarrow|B|_{\substack{Con\ reducción\\ de\ orden}}=6\begin{vmatrix}-5 & 7\\ -1 & 8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & 8\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & -1\end{vmatrix}$ de donde, $|B|\xrightarrow{R}|B|_{\substack{Simétrico\ reducido\ en\ orden\\ con\ entrada\ de\ signo\\ negativa}}$; es decir el

**Entrada con signo negativo.**

$\downarrow$

$$|B|=-6\begin{vmatrix}-5 & 7 & 5\\ -1^{ES}\nearrow & 8^{ES}\nearrow & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 7 & -2\\ 4^{ES}\nearrow & 8^{ES}\nearrow & -4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & -5 & -2\\ 4^{ES}\nearrow & -1^{ES}\nearrow & -4\end{vmatrix}$$

$$|B|=-6[(-1)(7)+(8)(5)]+3[(4)(7)+(8)(-2)]-2[(4)(-5)+(-1)(-2)]=-6[-7+40]+3[28-16]-2[-20+2]$$

$$|B|=-6[33]+3[12]-2[-18]=-198+36+36=-198+72=-126\Rightarrow|B|=-126.$$

**Comentarios finales**

1. Los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico con entradas primaria y secundaria de Leibniz, sólo pueden ser aplicados a determinantes de orden $(2\times2)$ que son la última reducción de orden a la que converge un determinante de orden superior (DOS), i.e.,

determinantes de orden $(3\times3),(4\times4),\ldots,(n\times n): n\in\mathbb{Z}^{+}$. Por ejemplo, el determinante de orden superior $(3\times3)$, se transforma en tres de orden base $(2\times2)$ al pivotear en los elementos $+a_{11}$, $-a_{12}$ y $+a_{13}$ para la (EPL), y $-a_{11}$, $+a_{12}$ $y$ $-a_{13}$ para la (ESL). Recordar el método de reducción de orden o de los cofactores para la solución de un (DOS).

2. Se obtienen resultados idénticos por cualquiera de los métodos, i.e., la Regla de Cramer, Cayley, Sarrus o de los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico.
3. Por los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico, se obtienen más rápidamente los resultados. El nuevo paradigma que en este trabajo estamos presentando, evita el conflicto que provocan los otros métodos con respecto a la multiplicación por (-1).

**Referencias**

[1] Nakos, G. & Joyner, D. 2006. Álgebra lineal con aplicaciones. Ed. Thomson, pp.: 382-387.

[2] Baldor, A., 1993. *Álgebra*. Publicaciones Culturales. Décima reimpresión, pp.: 333-347.

[3] Solar, G. E. y Speziale, de G. L., 1985. Álgebra lineal. Ed. Limusa: Grupo Noriega Editores. 2da. Edición, p.:419. México.